

Петраков А.А.,

Яркин В.В.,

Таран Р.А.,

Казачек Т.В.

Учебное пособие

# МЕХАНИКА ГРУНТОВ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

**ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ  
СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ**

---

Кафедра оснований, фундаментов и подземных сооружений

**Учебное пособие**

(часть №3)

Механика грунтов

специальность 8.092 101 Промышленное и гражданское строительство

Утверждено на заседании кафедры  
ОФиПС

Протокол № 10 от 26.05.2004 г.

Макеевка ДонНАСА – 2004 г.

Учебное пособие по курсу "Механика грунтов" / Петраков А.А., Яркин В.В., Таран Р.А., Казачек Т.В.; Под ред. Петракова А.А. – Макеевка: ДонНАСА, 2004. – 164 с.

Настоящее учебное пособие содержит материалы по дисциплине «Механика грунтов» для специальности «Промышленное и гражданское строительство» и включает в себя: конспект лекций; сборник практических заданий, которые выносятся на практические занятия, а затем в несколько видоизмененном виде присутствуют в экзаменационных билетах; методические указания к проведению лабораторных работ; образцы экзаменационных билетов; рекомендуемая учебно-методическая литература.

Учебное пособие является третьей частью сборника, объединяющего пять дисциплин читаемых кафедрой ОФиПС ДонНАСА, и предназначено не только для использования студентами, обучающимися по специальности «Промышленное и гражданское строительство», но и рекомендуется к использованию преподавателями, читающими курс «Механика грунтов» для других специальностей.

Составители:

Петраков А.А., д.т.н., профессор;

Яркин В.В., к.т.н., доцент;

Таран Р.А., к.т.н., ассистент;

Казачек Т.В., к.т.н., доцент.

Рецензент:

Зоценко Н.Л., д.т.н., профессор.

Научный редактор:

Петраков А.А., д.т.н., профессор.

Ответственный за выпуск:

Яркин В.В., к.т.н., доцент.

Утверждено на заседании Ученого совета Строительного факультета ДонНАСА  
Протокол № 8 от 20 апреля 2004 г.

## Содержание

<b>Требования государственного стандарта образования по дисциплине "Механика грунтов" .....</b>	<b>4</b>
<b>Конспект лекций по дисциплине «Механика грунтов» .....</b>	<b>5</b>
<b>Практические задания по курсу "Механика грунтов" .....</b>	<b>93</b>
<b>Лабораторные работы .....</b>	<b>138</b>
<b>Экзаменационный билет.....</b>	<b>160</b>
<b>Учебно-методическая литература .....</b>	<b>164</b>

## **Требования государственного стандарта образования по дисциплине "Механика грунтов"**

1. Дисциплина "Механика грунтов" внесена в цикл профессионально-ориентированных дисциплин. На ее изучение отводится 54 учебных часа. Формой итогового контроля является экзамен.

Аннотация дисциплины "Механика грунтов": Физические и механические свойства грунтов; сжимаемость грунтов; сопротивление грунтов сдвигу, трение и сцепление; фильтрационные свойства грунтов; распределение напряжений в грунтовых массивах; фазы напряженно-деформированного состояния грунтов, теория предельного равновесия грунтовых массивов, устойчивость откосов; деформации грунтов, осадки оснований и фундаментов; расчетные модели грунтовых оснований, теория фильтрационной консолидации, реологические модели грунтов.

Предшествующие дисциплины: высшая математика, физика, сопротивление материалов, строительная механика, строительное материаловедение, инженерная геология, инженерные изыскания.

2. Требования учебного плана по образовательно-профессиональному уровню "бакалавр" 6.092100 (по перечню-97).

3. Форма обучения – дневная.

4. Форма организации учебного процесса: лекции – 18 часов; практические занятия – 18 часов; самостоятельная работа – 18 часов; лабораторные занятия – 18 часов; форма контроля – экзамен.

5. Общий объем учебных занятий по курсу:  $18 + 18 + 18 = 54$  часа.

6. Объем самостоятельной работы студентов: 18 часов.

## **Конспект лекций по дисциплине «Механика грунтов»**

### **Тематический план лекционных занятий**

Курс лекций рассчитан на 18 учебных часов.

**Лекция 1.** Введение в курс. Краткий исторический обзор. Строительные свойства грунтов. Основные закономерности механики грунтов. Закон уплотнения Карла Терцаги (2 часа).

**Лекция 2.** Фазы напряженно-деформированного состояния грунта. Принцип линейной деформируемости. Закон прочности Кулона – Мора. Закон ламинарной фильтрации Дарси (2 часа).

**Лекция 3.** Распределение напряжений в грунтовом массиве от действия внешних нагрузок. Задача Ж. Буссинеска и ее приложения (2 часа).

**Лекция 4.** Задача Фламана. Закономерности распределения давлений. Изобары, распоры, сдвиги. Контактные напряжения. Напряжения от собственного веса грунта (2 часа).

**Лекция 5.** Теория предельного напряженного состояния грунта. Задача Пузыревского. Начальные и предельные критические давления. Огибающие зон предельного равновесия. Давление грунта на подпорные стены. Устойчивость подпорных стен (2 часа).

**Лекция 6.** Устойчивость грунтовых откосов (2 часа).

**Лекция 7.** Модели грунтового основания. Методы расчета осадок (2 часа).

**Лекция 8.** Нестационарные модели грунтового основания. Фильтрационная консолидация и ползучесть грунта. Нелинейные модели грунтового основания (4 часа).

## **Лекция 1. Введение в курс. Краткий исторический обзор. Строительные свойства грунтов. Основные закономерности механики грунтов. Закон уплотнения Карла Терцаги.**

### **1. Содержание, цели и задачи курса**

Механика грунтов изучает проблемы прочности и устойчивости грунтовых массивов и определяет условия их использования в качестве оснований объектов строительства. Настоящий курс является естественным продолжением курсов «Инженерная геология» и «Инженерные изыскания в строительстве». Основной целью курса является изложение основ инженерной теории расчета оснований по предельным состояниям *I* и *II* группы в интеграции с нормами строительного проектирования. Основными задачами, решаемыми в процессе изучения курса, являются: установление основных закономерностей механики грунтов и обобщение их в виде законов; изучение распределения напряжений в грунтовом массиве при действии различных нагружающих факторов; исследование прочности оснований и грунтовых массивов с использованием теории предельного равновесия; изучение методов расчета осадок оснований фундаментов, в том числе в условиях незавершенной консолидации грунтов, слагающих основание.

### **2. Краткий исторический обзор**

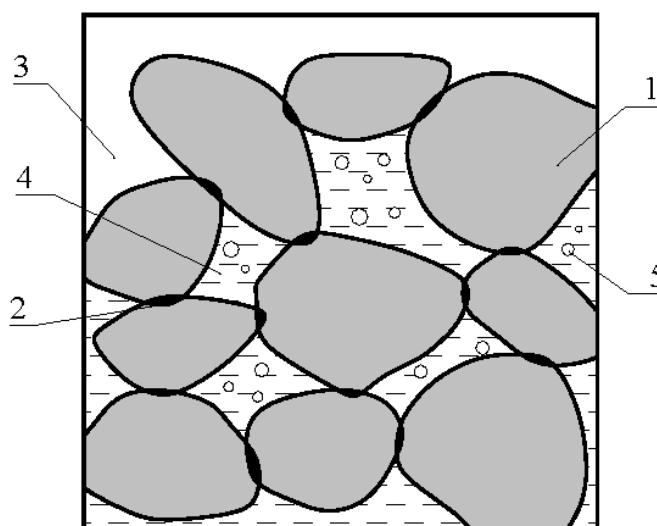
Первой фундаментальной работой по механике грунтов принято считать исследование Кулона (Франция, 1773) по теории прочности сыпучих тел, известное в современной механике как закон Кулона-Мора. Академик Фусс (Россия, 1801) и инженер Винклер (Франция, 1867) предложили механические модели грунтового основания для расчета конструкций, взаимодействующих с грунтовой средой. Закономерности фильтрационных процессов в песчаных грунтах были впервые установлены Дарси (Франция, 1856) и обобщены в современной механике как закон ламинарной фильтрации Дарси. Труд профессора Буссинеска (Франция, 1885) «О распределении напряжений в упругой почве от сосредоточенной силы» до настоящего времени изучается в курсе механики грунтов и является основополагающим в теории распределения напряжений в грунтовой среде. Механика грунтов как самостоятельная дисциплина возникла с момента опубликования монографии профессора Терцаги (Германия, 1925) «Строительная механика грунтов». Именно ему принадлежит установление основополагающей в теории расчета осадок зависимости, известной как закон уплотнения Терцаги. Существенное развитие

механика грунтов получила в работах ученых русской школы: Пузыревский (1923), Герсеванов (1931), Флорин (1936), Соколовский (1942), Егоров (1948), Березанцев (1948). Первый курс лекций по механике грунтов был подготовлен в СССР профессором Цытовичем (1934). Достижения украинских ученых в области механики грунтов отражены в работах Швеца В.Б., Гольдштейна М.Н., Клепикова С.Н. и др.

### 3. Грунт как объект исследования и его свойства

В соответствии со строительной классификацией грунты подразделяются на скальные, крупнообломочные, песчаные и пылевато-глинистые. Скальные грунты детально изучаются в связи со строительством подземных горных выработок в курсе «Механика горных пород». В механике грунтов предметом исследований являются последние три вида грунтов. При этом крупнообломочные и песчаные грунты объединяются в группу несвязных или сыпучих грунтов, а пылевато-глинистые грунты рассматриваются как связные.

С позиций общей механики грунт (рис. 1.1) представляет собой сложную термодинамическую систему, которая по принятой классификации является многофазной и неоднородной. В составе объема грунта присутствуют вещества в трех фазовых состояниях: минеральные частицы (твердая фаза); грунтовая вода (жидкая фаза); газ и пар (газообразная фаза). Минеральные частицы могут иметь размеры от десятков миллиметров до долей микрона. Это порождает большое разнообразие видов грунта, существенно отличающихся своими



**Рис. 1.1. Термодинамическая модель грунта: 1 – минеральные частицы (твердая фаза); 2 – структурные связи между минеральными частицами; 3 – поры, заполненные газом или паром; 4 – поры, заполненные водой и растворенным в воде газом; 5 – пузырьки, заполненные газом и паром.**

свойствами. Пространство между минеральными частицами, заполненное водой, газом или паром, называют порами. Давление в порах называют поровым давлением. Оно может относиться исключительно к воде, если все поры заполнены водой, исключительно к газу при отсутствии воды в порах или к поверхности раздела фаз «вода – газ (пар)». Газ и пар могут также



содержаться в пузырьках или в растворенном (газ) в воде виде. Систему минеральных частиц, составляющих грунт, называют его скелетом. Между минеральными частицами грунта могут существовать цементационные или коллоидные связи, прочность которых определяет степень связности грунта. Природа этих связей, называемых структурными, как и любых связей в твердом теле, электрическая. Микроскопические свойства грунта, включая взаимодействия составляющих его компонентов на молекулярном уровне, изучаются в курсе «Грунтоведение». Если напряжения в скелете грунта не превышают прочности связей между минеральными частицами (эта прочность называется структурной), скелет деформируется упруго. Напряжения в скелете в общем случае не совпадают с поровым давлением. Сопротивление грунта нагружению определяется суммой напряжений в скелете и порового давления.

В зависимости от температуры и давления компоненты, составляющие грунт, могут претерпевать процессы фазовых переходов. Например, при низких температурах грунтовая вода может частично переходить в лед (твердая фаза). При извлечении образца грунта с большой глубины происходит его упругое расширение в связи с уменьшением напряжений на поверхности выделенного объема до нуля. Расширение грунта может привести к отрицательному (по сравнению с атмосферным) значению порового давления. В результате этого могут протекать процессы газовыделения из поровой воды и превращения части поровой воды в пар (парообразование). Наоборот, при повышении порового давления могут наблюдаться процессы газорастворения и конденсации пара. Эти процессы существенно зависят от температуры и учитываются при расчетах гидротехнических сооружений.

Грунт является открытой термодинамической системой в отношении процессов массопереноса (воды или минеральных частиц). Явление массопереноса в форме движения поровой воды учитывается в теории фильтрационной консолидации грунтов (выдавливание воды из пор при уменьшении их объема под действием нагрузки). Явление массопереноса в форме перемещения минеральных частиц грунта учитывается при изучении суффозионных процессов в грунтах (вымыв из грунта компонентов скелета под воздействием фильтрационного потока). Минеральные частицы специфических грунтов, а также связи между ними могут состоять из растворимых солей. В этом случае миграция поровой воды может приводить к химической суффозии (растворение и перенос вещества в растворенном виде). Присутствие в поровой

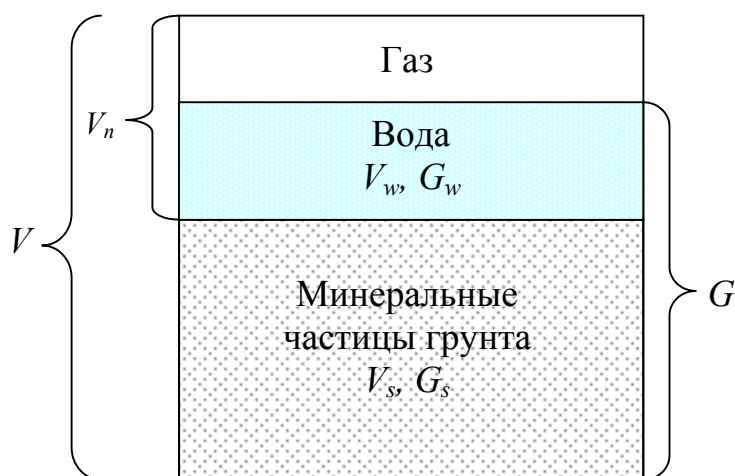
воде растворов солей, кислот и щелочей делает ее агрессивной по отношению к конструкциям фундаментов.

Отмеченные здесь особенности поведения грунтов при изменении давлений и температуры изучаются в специальных разделах механики грунтов. Классическая механика грунтов основана на ряде следующих допущений:

- а) грунт деформируется как квазиоднородное упругое тело, если напряжения в скелете грунта не превышают его структурную прочность;
- б) поровая вода является несжимаемой;
- в) присутствие в порах газа и пара не оказывает существенного влияния на процесс деформирования грунта;
- г) сжимаемость минеральных частиц грунта пренебрежимо мала;
- д) деформируемость грунта под нагрузкой обусловлена, в основном, переупаковкой скелета после разрушения структурных связей, приводящей к изменению объема пор.

#### 4. Основные характеристики грунта, определяющие его свойства

В данном разделе содержатся теоретические обобщения сведений о свойствах грунтов, приведенных в курсе "Инженерные изыскания в строительстве". Различают физические, прочностные и деформационные характеристики грунта. Физические характеристики подразделяются на основные, производные и классификационные. Основными являются характеристики, определяемые из опыта. Остальные физические характеристики являются расчетными. Введем следующие условные обозначения физических величин: показанные на рис. 1.2;  $\rho_w$ ,  $\gamma_w$  – плотность и удельный вес воды;  $g$  – ускорение свободного падения.



**Рис. 1.2. Модель грунта:**  
 $V$  – объем образца грунта;  $V_s$  – объем минеральных частиц грунта в объеме  $V$ ;  $V_n$  – объем пор в объеме  $V$ ;  $V_w$  – объем воды в порах;  
 $G$  – масса образца грунта;  $G_s$  – масса частиц грунта (скелета);  $G_w$  – масса содержащейся в порах воды;  
 $G_{w,p}$  – то же в заданном состоянии грунта на границе пластичности (раскатывания);  $G_{w,L}$  – то же в заданном состоянии грунта на границе текучести.

Данные о свойствах грунтов для наглядности представим в табличной форме.

Таблица 1.1.

## Основные физические характеристики грунта

Наименование	Обозначение	Размерность	Формула для вычисления
Плотность грунта	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	$\rho = G / V$
Удельный вес грунта	$\gamma$	кН/м <sup>3</sup>	$\gamma = \rho \cdot g$
Плотность частиц грунта	$\rho_s$	кг/м <sup>3</sup>	$\rho_s = G_s / V_s$
Удельный вес частиц грунта	$\gamma_s$	кН/м <sup>3</sup>	$\gamma_s = \rho_s \cdot g$
Влажность грунта	$W$	безразмерна	$W = (G - G_s) / G_s = G_w / G_s$
Влажность на границе пластичности	$W_p$	безразмерна	$W_p = G_{w,p} / G_s$
Влажность на границе текучести	$W_L$	безразмерна	$W_L = G_{w,L} / G_s$

Таблица 1.2.

## Производные физические характеристики грунта

Наименование	Обозначение	Размерность	Формула для вычисления
Плотность сухого грунта	$\rho_d$	кг/м <sup>3</sup>	$\rho_d = G_s / V = \rho / (1 + W)$
Удельный вес сухого грунта	$\gamma_d$	кН/м <sup>3</sup>	$\gamma_d = \rho_d \cdot g = \gamma / (1 + W)$
Коэффициент пористости	$e$	безразмерна	$e = V_n / V_s = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d = \rho_s / \rho_d - 1$
Пористость	$n$	безразмерна	$n = V_n / V = (\rho_s - \rho_d) / \rho_s = 1 - \rho_d / \rho_s$

Таблица 1.3.

## Классификационные физические характеристики грунта

Наименование	Обозначение	Размерность	Формула для вычисления
Число пластичности	$I_p$	безразмерна	$I_p = W_L - W_p$
Показатель текучести	$I_L$	безразмерна	$I_L = (W - W_p) / (W_L - W_p) = (W - W_p) / I_p$
Степень влажности	$S_r$	безразмерна	$S_r = V_w / V_n = (\rho_s / \rho_w) \cdot (W / e)$
Полная влагоемкость	$W_{sat}$	безразмерна	$W_{sat} = (\rho_w / \rho_s) \cdot e$ (соответствует $S_r = 1$ )

Приведенные в таблицах формулы для вычисления производных и классификационных физических характеристик грунта получены в результате преобразования выражений, являющихся определениями этих характеристик:

$$\rho_d = \frac{G_s}{V} = \frac{G - G_w}{V} = \rho - \frac{G_s \cdot W}{V} = \rho - \rho_d \cdot W = \frac{\rho}{1 + W}; \quad (1.1)$$

$$e = \frac{V_n}{V_s} = \frac{V - V_s}{V_s} = \frac{V}{V_s} - 1 = \left( \frac{G_s}{\rho_d} \right) / \left( \frac{G_s}{\rho_s} \right) - 1 = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1 = \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_d}; \quad (1.2)$$

$$n = \frac{V_n}{V} = \frac{V - V_s}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} = 1 - \left( \frac{G_s}{\rho_s} \right) / \left( \frac{G_s}{\rho_d} \right) = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} = \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_s}; \quad (1.3)$$

$$S_r = \frac{V_w}{V_n} = \left( \frac{G_w}{\rho_w} \right) / (V_s \cdot e) = \left( \frac{G_s \cdot W}{\rho_w} \right) / \left( \frac{G_s \cdot e}{\rho_s} \right) = \frac{\rho_s}{\rho_w} \cdot \frac{W}{e}. \quad (1.4)$$

Разделение физических характеристик грунта на производные и классификационные весьма условно, так как и те и другие одновременно являются и производными и классификационными. По величине плотности сухого грунта можно делать предварительные выводы о пригодности данного грунта для целей строительства. Грунты с плотностью сухого грунта в пределах 1100–1300 кг/м<sup>3</sup>, как правило, являются непригодными для целей строительства. Прочным грунтам соответствует плотность в сухом состоянии в пределах 1600–1800 кг/м<sup>3</sup>. Коэффициент пористости и пористость позволяют более дифференцированно оценить пригодность грунтов для целей строительства. Например, при значении коэффициента пористости больше единицы грунты, как правило, непригодны для целей строительства. Прочным грунтам соответствуют значения коэффициентов пористости в пределах 0,4–0,6. Кроме этого, коэффициент пористости и показатель текучести являются входными параметрами в нормативные таблицы, позволяющие определять для предварительных расчетов прочностные и деформационные характеристики грунта. По числу пластичности устанавливают вид пылевато-глинистого грунта:

Значение числа пластичности	Наименование вида грунта
$0,01 > I_p$	песчаный грунт
$0,01 \leq I_p < 0,07$	супесь
$0,07 \leq I_p < 0,17$	суглинок
$I_p \geq 0,17$	глина

Для большей наглядности классификацию вида грунта по числу пластичности удобно представить в форме диаграммы:



По показателю текучести устанавливают состояние (консистенцию) грунта. Различают состояния: твердое ( $0 > I_L$ ); пластичное ( $0 \leq I_L < 1$ ); текучее ( $I_L \geq 1$ ). Пластичное состояние суглинков и глин подразделяют на полутвердое (твердопластичное), тугопластичное, мягкопластичное и текучепластичное. Прочные грунты находятся, как правило, в состоянии от твердого до тугопластичного. Ниже приводится диаграмма, позволяющая установить состояние пылевато-глинистого грунта по показателю текучести:

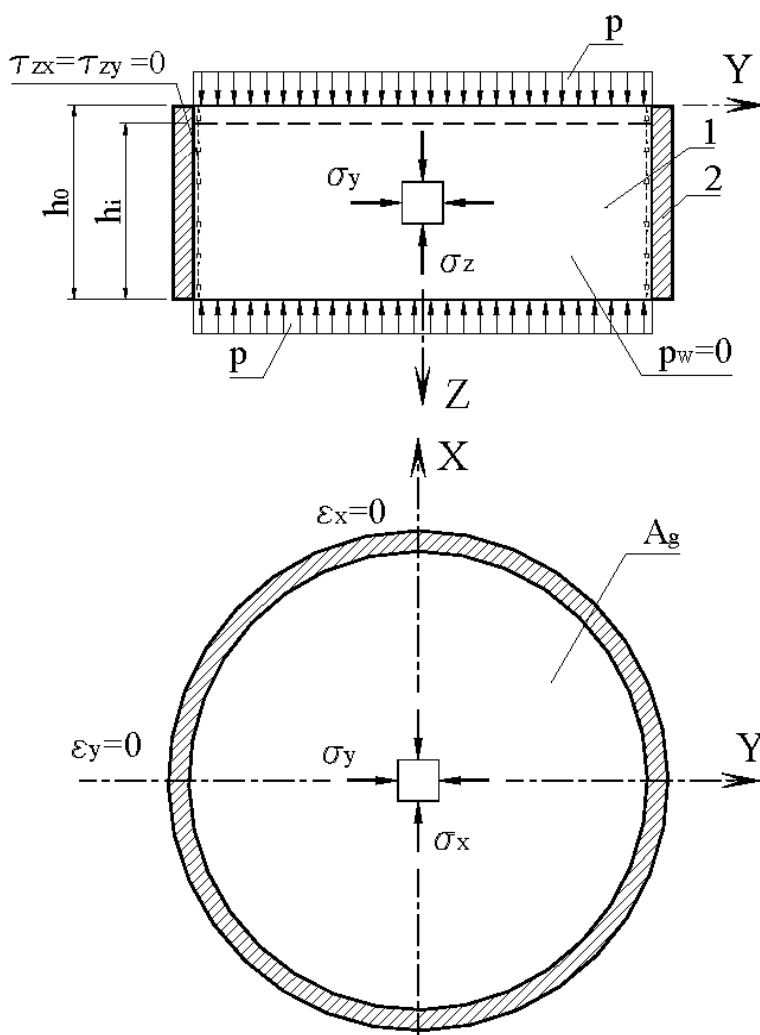


Текучее и текучепластичное состояние грунта делают его непригодным для целей строительства. Если полная влагоемкость грунта  $W_{sat}$  превышает его влажность на границе текучести  $W_L$ , это свидетельствует о непригодности грунта для целей строительства при потенциальной подтопляемости территории. Физические характеристики грунта используются для анализа инженерно-геологических условий площадки строительства с выводами о пригодности грунтов, слагающих сжимаемую толщу в основании фундаментов.

### 5. Закон уплотнения Терцаги

Закон уплотнения является одним из основных законов механики грунтов, основанным на допущении о том, что деформации грунта происходят, в основном, за счет изменения его пористости. В качестве предварительных замечаний отметим следующее. Грунт существенно отличается от таких строительных материалов как сталь, бетон и т.п. Крупнообломочные и песчаные грунты не обладают связностью. Связные пылевато-глинистые грунты имеют очень низкую прочность при одноосном сжатии. Все это создает большие проблемы при экспериментальном определении прочностных и

деформационных характеристик грунтов. Поскольку не представляется возможным испытать грунт при одноосном напряженном состоянии (растяжение, сжатие), как это принято для большинства строительных материалов, для испытания грунтов используют схемы со сложным напряженным состоянием (см. курс "Инженерные изыскания в строительстве"). Одной из таких схем является схема осесимметричного компрессионного сжатия (рис. 1.3). Граничными условиями в такой схеме являются нулевые значения поперечных деформаций. Возникающие на боковых поверхностях цилиндрического образца давления не измеряются, а оцениваются теоретически. При этом касательные напряжения на этих поверхностях предполагаются равными нулю, в связи с чем вертикальное и боковое давления – суть главные напряжения. Ниже приводятся теоретические выкладки, связанные с приложениями закона уплотнения Терцаги, простейший вид которого уже рассматривался в курсе "Инженерные изыскания в строительстве".



**Рис. 1.3. Напряженное состояние грунта в виде осесимметричного компрессионного сжатия:**

**1 – цилиндрический образец грунта;**

**2 – жесткое кольцо с безфрикционной внутренней поверхностью;**

**$p$  – вертикальное давление;**

**$p_w$  – давление в поровой воде;**

**$A_g$  – площадь поперечного сечения грунта;**

**$h_0, h_1$  – соответственно высота ненагруженного и нагруженного образца грунта;**

**$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  – компоненты тензора напряжений;**

**$\varepsilon_x, \varepsilon_y$  – компоненты тензора деформаций.**

**5.1. Определение коэффициента бокового давления при осесимметричном компрессионном сжатии грунта.** Примем зависимости между деформациями и напряжениями в грунте в форме закона Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z); \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z); \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).\end{aligned}\tag{1.5}$$

Введем понятие коэффициента бокового давления в виде отношения бокового давления к нормальному. Тогда, с учетом осевой симметрии,

$$\sigma_x = \sigma_y = \xi \cdot \sigma_z,$$

где  $\xi$  – коэффициент бокового давления.

Граничные условия при осесимметричном компрессионном сжатии имеют вид:  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ . Воспользуемся одним из граничных условий и выразим коэффициент бокового давления через коэффициент Пуассона, значение которого для различных видов грунтов содержится в справочных данных. Преобразования будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\xi \sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\xi \sigma_z + \sigma_z) = 0; \\ \xi - \nu \cdot \xi - \nu &= 0; \quad \xi = \frac{\nu}{1 - \nu}; \\ \nu &= \frac{\xi}{1 + \xi}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

В соответствии с полученными выражениями коэффициент бокового давления тем выше, чем более пластичным является грунт, и для состояния текучести, когда  $\nu \rightarrow 0,5$ , принимает значения, близкие к единице.

**5.2. Зависимость между осевой деформацией и вертикальным давлением при осесимметричном компрессионном сжатии.** Эту зависимость получим путем преобразования выражения для осевой деформации в соответствии с законом Гука (1.5) с учетом полученной в п. 5.1 зависимости между коэффициентом бокового давления и коэффициентом Пуассона:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} \cdot (\xi \cdot \sigma_z + \xi \cdot \sigma_z) = \frac{\sigma_z}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \nu \cdot \xi) = \frac{\sigma_z}{E} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \nu^2}{1 - \nu}\right) = \frac{\sigma_z}{E} \cdot \beta ;$$

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot \nu^2}{1 - \nu} . \quad (1.7)$$

### 5.3. Зависимость между осевой деформацией и изменением коэффициента пористости при осесимметричном компрессионном сжатии.

При компрессионном сжатии образца грунта измеряются изменения его высоты  $\Delta h_i = h_0 - h_i$ . При этом начальной высоте образца грунта  $h_0$  соответствует коэффициент пористости  $e_0$ , а измененной высоте образца  $h_i$  – измененный коэффициент пористости  $e_i$ . Измененный коэффициент пористости  $e_i$  вычисляется через измеряемые в опыте величины в соответствии с выражением:

$$e_i = \frac{V_{n,i}}{V_s} = \frac{V_i - V_s}{V_s} = \frac{V_i}{V_s} - 1 = (h_i \cdot A) / \left( \frac{G_s}{\rho_s} \right) - 1 = (h_i \cdot A) / \left( \frac{V \cdot \rho_d}{\rho_s} \right) - 1 =$$

$$= (h_i \cdot A) / \left( \frac{h_0 \cdot A \cdot \rho_d}{\rho_s} \right) - 1 = \frac{h_i}{h_0} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1,$$

где  $V_{n,i}$  и  $V_i$  – объем пор в грунте и объем грунта при высоте образца  $h_i$ ;  
 $A$  – площадь поперечного сечения образца грунта.

Изменение коэффициента пористости, вызванное нагружением грунта в условиях компрессионного сжатия, вычисляется в функции от осевой деформации по следующей зависимости:

$$\Delta e_i = e_0 - e_i = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1 - \frac{h_i}{h_0} \cdot \frac{\rho_s}{\rho_d} + 1 = \frac{\rho_s}{\rho_d} \cdot \left(1 - \frac{h_i}{h_0}\right) =$$

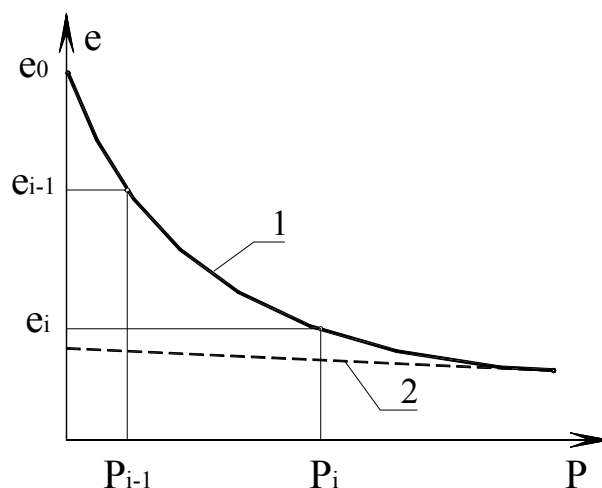
$$= \frac{\rho_s}{\rho_d} \cdot \frac{h_0 - h_i}{h_0} = \frac{\rho_s}{\rho_d} \cdot \frac{\Delta h_i}{h_0} = \frac{\rho_s}{\rho_d} \cdot \varepsilon_{z,i} = (1 + e_0) \cdot \varepsilon_{z,i} .$$

Из полученного выражения находим зависимость осевой деформации от изменения коэффициента пористости в условиях компрессионного сжатия:

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{e_0 - e_i}{1 + e_0} = \frac{\Delta e_i}{1 + e_0} . \quad (1.8)$$



**5.4. Закон уплотнения.** Зависимость изменения коэффициента пористости от вертикального давления при компрессионном сжатии грунта изображают графиком (рис. 1.4), который называют компрессионной кривой. Начало графика (на рис. 1.4 не показано) обычно изображают горизонтальной линией, параллельной оси давлений. Искривление графика начинается с момента разрушения структурных связей или с момента исчерпания структурной прочности грунта, что одно и то же. После этого деформации грунта происходят исключительно за счет его уплотнения, т.е. изменения пористости. В опыте на компрессионное сжатие должно, как правило, отсутствовать поровое давление, что достигается применением открытой, по отношению к фильтрации поровой воды, схемы испытания (испытание по дренированно-консолидированной схеме). Присутствие порового давления в опыте может существенно исказить результаты испытаний (занизить значение коэффициента сжимаемости и завысить значение модуля деформации). Закон уплотнения грунта формулируется следующим образом: **изменение коэффициента пористости при достаточно малом изменении давления пропорционально изменению давления.** Применительно к графику на рис. 1.4 закон уплотнения выражается такой зависимостью:



**Рис 1.4. Компрессионная кривая: 1 – нагрузка; 2 – разгрузка;  $e$  – коэффициент пористости;  $P$  – давление.**

$$e_{i-1} - e_i = m_0 \cdot (p_i - p_{i-1}), \quad (1.9)$$

где  $m_0$  – коэффициент сжимаемости грунта ( $\text{м}^2/\text{кН}$ ).

В дифференциальной форме закон уплотнения записывается в виде выражения:

$$de = -m_0 \cdot dp, \quad (1.10)$$

где знак «минус» указывает на то, что увеличению давления соответствует уменьшение коэффициента пористости.

Закон уплотнения в форме (1.10) может использоваться только при анализе напряженных состояний грунтового массива, близких к компрессионному

сжатию. Характеристикой сжимаемости грунта при этом виде напряженного состояния является коэффициент сжимаемости  $m_0$ . Для общего случая напряженного состояния грунта закон уплотнения выражают в форме зависимости осевой деформации от давления:

$$\varepsilon_z = \frac{e_0 - e_i}{1 + e_0} = \frac{m_0 \cdot \sigma_z}{1 + e_0} = m_v \cdot \sigma_z = \frac{\sigma_z}{E} \cdot \beta; \quad m_v = \frac{m_0}{1 + e_0}; \quad E = \frac{\beta}{m_v}, \quad (1.11)$$

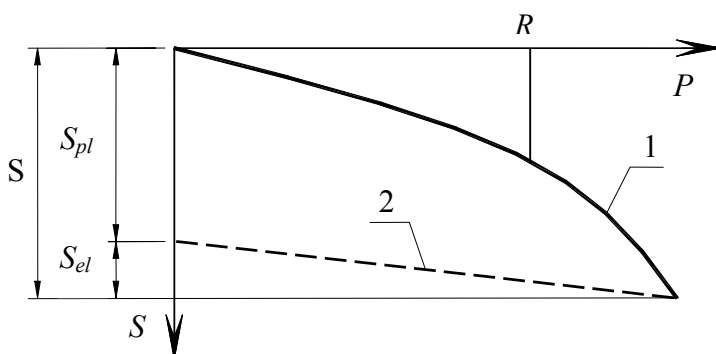
где  $m_v$  – коэффициент относительной сжимаемости грунта ( $\text{м}^2/\text{кН}$ );

$E$  – модуль деформации грунта ( $\text{кН}/\text{м}^2$ );

$\beta$  – коэффициент вида напряженного состояния в опыте по определению модуля деформации грунта (при определении модуля деформации в опыте при компрессионном сжатии грунта  $\beta = 1 - (2 \cdot \nu^2) / (1 - \nu)$ , см. (1.7)).

Закон уплотнения в форме (1.11) позволяет вычислять осевую деформацию при компрессионном сжатии с помощью коэффициента относительной сжимаемости грунта  $m_v$  (сравните, изменение коэффициента пористости в этом случае вычисляется с помощью коэффициента сжимаемости  $m_0$ ). В общем случае напряженного состояния осевая деформация вычисляется с помощью модуля деформации грунта  $E$ . При этом закону уплотнения в форме (1.11) можно дать такую формулировку: **модуль деформации грунта обратно пропорционален коэффициенту относительной сжимаемости грунта и прямо пропорционален некоторой функции коэффициента Пуассона, учитывающей вид напряженного состояния при компрессионном сжатии.**

Наряду с рассмотренными выше лабораторными методами, для определения модуля деформации грунтов широко применяются полевые методы. Наиболее распространенным является метод испытания грунтов жестким круглым штампом площадью  $5000 \text{ см}^2$ . По результатам испытаний строят график зависимости осадок штампа от средних давлений по его подошве (рис. 1.5).



**Рис 1.5. График испытания грунтов основанием штампом: 1 – нагрузка; 2 – разгрузка;  $R$  – расчетное сопротивление грунта;  $S$ ,  $S_{el}$ ,  $S_{pl}$  – соответственно полная, упругая (восстанавливающаяся) и пластическая (невосстанавливающаяся) осадка.**

Модуль деформации грунта вычисляют по формуле:

$$E_0 = (1 - \nu^2) \frac{P}{S d}, \quad (1.12)$$

где  $E_0$  – модуль общей деформации грунта (кН/м<sup>2</sup>);

$P$  – нагрузка на штамп (кН);

$S$  – осадка штампа (м);

$d$  – диаметр штампа (м).

Установлено, что модули деформации грунта, определенные в лабораторных (1.11) и полевых (1.12) условиях, могут существенно отличаться. При этом, чем меньше коэффициент пористости грунта, тем эта разница больше. В связи с этим модуль деформации, определенный в лабораторных условиях (1.11), умножают на поправочный коэффициент И.А. Агишева. Этот коэффициент изменяется от 2 для рыхлых грунтов ( $e = 1,6$ ) до 7,5 для плотных грунтов ( $e = 0,2$ ). Для суглинков Донбасса он изменяется от 3 до 6. Модуль деформации принимает значения от 5 МПа для слабых грунтов до 30 МПа для прочных грунтов. Модуль деформации скальных грунтов составляет 100 МПа и выше.

Таким образом, **деформационными характеристиками грунта** являются: модуль деформации  $E$ ; коэффициент поперечной деформации (Пуассона)  $\nu$ ; коэффициент сжимаемости  $m_0$ ; коэффициент относительной сжимаемости  $m_v$ .

## **Лекция 2. Фазы напряженно-деформированного состояния грунта. Принцип линейной деформируемости. Закон прочности Кулона – Мора. Закон ламинарной фильтрации Дарси.**

**1. Фазы напряженно-деформированного состояния грунта** изучаются с целью установления расчетных моделей деформирования грунтового основания, приемлемых для инженерных расчетов его прочности, устойчивости, сжимаемости, горизонтальных и угловых перемещений. В связи с этой проблемой традиционно рассматривается график (рис. 2.1) испытания грунтового основания штампом, изображающий зависимость осадки штампа от средних напряжений, действующих по его подошве. Предполагается, что в этом опыте отсутствует избыточное (по сравнению с атмосферным) поровое давление. Такие опыты, как уже отмечалось в лекции 1, называются опытами по дренированно-консолидированной схеме, а получаемые в таких опытах осадки называются стабилизированными (конечными). Предполагается также, что скорость нагружения в опыте достаточно мала, в результате чего деформации ползучести скелета грунта, если они имеют место при данном уровне нагружения, в основном успевают проявиться. По этой причине скорость нагружения в таких опытах регламентируется стандартами. Например, в штамповых опытах устанавливается (в общем случае, субъективный) критерий стабилизации осадки 0,01 мм за 2 часа. Анализ стабилизированных в указанном выше смысле графиков испытания основания штампом позволяет выделить следующие фазы напряженно-деформированного состояния грунта: 0 – фаза упругих деформаций; I – фаза уплотнения; II – фаза сдвигов; III – фаза выпора. Кратко охарактеризуем напряженно-деформированное состояние грунта в каждой из выделенных фаз.

**Фаза упругих деформаций** характеризуется уровнем напряжений в скелете грунта, не превышающим прочность структурных связей между минеральными частицами грунта или, что то же самое, структурной прочности грунта. Деформации грунта в этой фазе обратимы и пренебрежимо малы, т.к. обусловлены сжимаемостью минеральных частиц. Уровень напряжений, соответствующий концу этой фазы, называется структурной прочностью грунта  $p_{стр.}$  и обычно не превышает 5–10 % допустимых на грунт давлений.

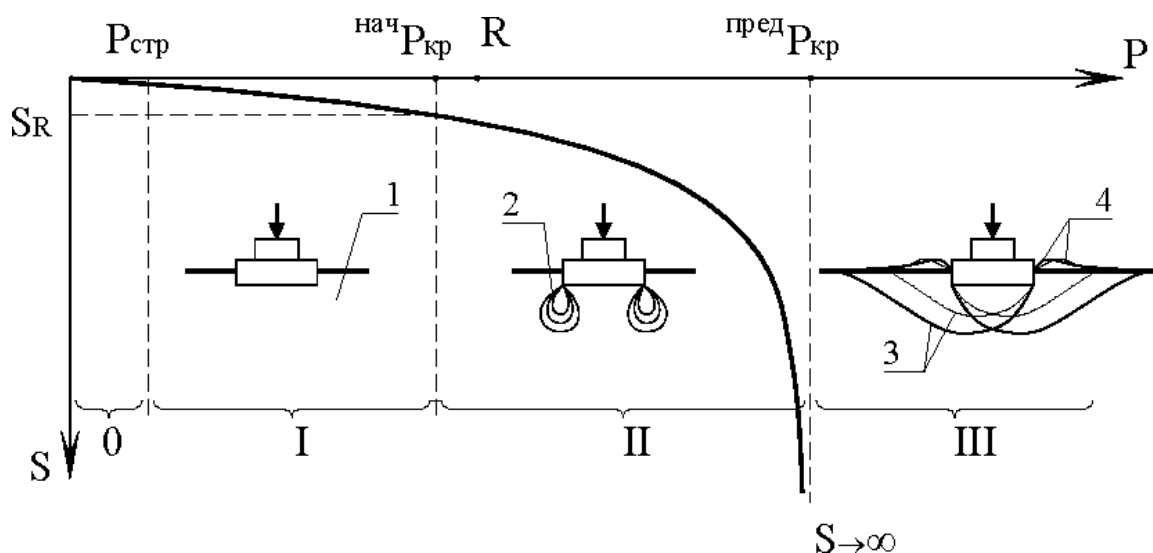


Рис. 2.1. Фазы напряженно-деформированного состояния грунта:

$P_{стр}$  – структурная прочность;  $^{нач}P_{кр}$  – начальное критическое давление;  
 $^{пред}P_{кр}$  – предельное критическое давление;  $R$  – расчетное сопротивление грунта;  
 0 – фаза упругой работы; I – фаза уплотнения; II – фаза сдвигов; III – фаза выпоров;  
 1 – основание в допредельном состоянии; 2 – зоны сдвигов; 3 – линии скольжения;  
 4 – зоны выпоров

**Фаза уплотнения** соответствует уровням напряжений в грунте, в диапазоне которых процесс его деформирования удовлетворительно подчиняется закону уплотнения Терцаги. Линейная зависимость между деформациями и напряжениями в этой фазе не является обратимой. При разгрузке штампа из диапазона давлений, соответствующего фазе уплотнения, грунт деформируется по линейной зависимости, не совпадающей с ветвью нагрузки. При полной разгрузке штампа (рис. 1.5) имеет место необратимая (пластическая) осадка, соответствующая нулевым напряжениям по подошве. Повторное нагружение штампа до уровня напряжений, достигнутых перед разгрузкой, происходит по графику, совпадающему с графиком разгрузки. Нагружение выше этого уровня происходит по закону первичной нагрузки. Таким образом, закон уплотнения Терцаги устанавливает линейную зависимость между напряжением и суммой упругой и пластической деформации грунта. Указанная особенность закона уплотнения формулируется как **принцип линейной деформируемости**: при простом нагружении грунта в фазе его уплотнения сумма упругой и пластической деформации линейно зависит от действующего напряжения. Коэффициентом пропорциональности в этой линейной зависимости является модуль деформации грунта  $E$ , названный так в отличие от модуля упругости, характеризующего деформацию упругого тела. Модуль упругости грунта  $E_e$  определяется по графику разгрузки и

является коэффициентом пропорциональности между упругой деформацией грунта и действующим напряжением. Модуль деформации используется в статических расчетах, а модуль упругости – в динамических расчетах грунтовых оснований.

**Фаза сдвигов** характеризует начало образования в грунте зон предельного равновесия. Зоной предельного равновесия в грунте называют геометрическое место точек, в которых не удовлетворяются условия прочности Кулона – Мора. Первоначально эти зоны образуются по краям штампа, где имеет место концентрация напряжений. Разрушение грунта сопровождается большими сдвиговыми деформациями, что нашло отражение в названии рассматриваемой фазы напряженно-деформированного состояния грунта. Уплотнение грунта в этой фазе практически не происходит. Грунт считается несжимаемым, а коэффициент Пуассона в этой фазе близок к 0,5. Давление на грунт, соответствующее началу фазы сдвигов, называют **начальным критическим давлением** –  $p_{кр}^{нач}$ .

**Фаза выпора** является следствием развития фазы сдвигов в области грунтового массива, являющегося основанием штампа, с образованием поверхностей скольжения, отделяющих основание штампа от нижележащего грунтового массива. В результате этого осадки штампа происходят без увеличения нагрузки за счет перемещения грунта основания из-под штампа по плоскостям скольжения с выходом на поверхность грунтового массива. При этом вокруг штампа происходит поднятие (выпор) грунта, что нашло отражение в названии этой фазы. Непосредственно под штампом в фазе выпора образуется коническая переуплотненная зона, называемая ядром жесткости. Прочность этой зоны обусловлена боковыми давлениями со стороны окружающего грунта, находящегося в состоянии пластического течения. Как известно, коэффициент бокового давления в грунте в состоянии пластического течения стремится к единице. Таким образом, жесткое ядро находится до исчерпания несущей способности основания в состоянии компрессионного сжатия, близкого к трехосному сжатию, что и определяет его высокую прочность. В зонах пластического течения недоуплотненные грунты получают дополнительное уплотнение, а переуплотненные – разуплотняются. Это явление называется дилатансией. Давление, при котором наступает фаза выпора, называется предельным критическим давлением –  $p_{кр}^{пред}$ .

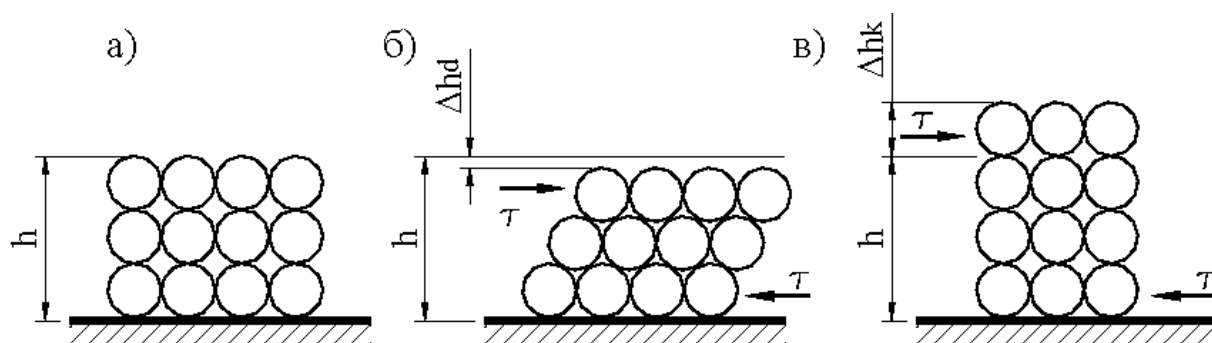
В соответствии с охарактеризованными выше фазами напряженно-деформированного состояния грунта применяются следующие его расчетные модели:

Уровень напряжений $p$	Расчетная модель	Характеристики модели	Методы анализа
$p \leq p_{стр.}$	Упругая среда	Модуль упругости	Теория упругости
$p_{стр.} < p <^{нач.} p_{кр.}$	Линейно-деформируемая неупругая среда	Модуль деформации при нагрузке и модуль упругости при разгрузке	Теория упругости анизотропной среды
$^{нач.} p_{кр.} \leq p <^{пред.} p_{кр.}$	Упругопластическая среда	Функциональная зависимость деформаций от напряжений	Теория пластичности
$p \geq^{пред.} p_{кр.}$	Дилатирующая среда	Модули дилатансии (дилатации и контракции)	Дилатансионная теория

**2. Закон прочности Кулона – Мора** устанавливает условия, при которых грунт деформируется без увеличения напряжений за счет изменения формы. При этом его объемная деформация предполагается неизменной (принцип несжимаемости в стадии пластического течения). Из приведенного определения становится очевидным невозможность определения прочностных характеристик грунта в опыте на компрессионное сжатие. По этой причине используют схемы испытаний, в которых нагружение сопровождается развитием сдвиговых напряжений и деформаций. Нашли распространение следующие схемы испытаний: срез по фиксированной плоскости (испытание грунта в срезном приборе); плоский сдвиг объема грунта в состоянии компрессионного сжатия (скашивание образца грунта в срезном приборе); сжатие грунта в условиях переменного бокового давления (испытание в стабилометре). Наиболее надежные результаты дают испытания в стабилометре. Тем не менее, самым распространенным способом определения прочностных характеристик грунта является испытание его в срезном приборе.

Если понятие прочности связного грунта не выходит за рамки традиционных представлений о прочности строительных материалов, то понятие прочности несвязных (сыпучих) грунтов требует дополнительных пояснений. Например, литературная метафора «строить замки на песке» начисто отрицает наличие прочностных свойств у песчаных оснований. В то же

самое время строительная практика утверждает, что основание из крупнозернистого песка являются одним из самых надежных видов оснований. Механизм прочности несвязных грунтов заключается в следующем. Под действием сжимающих напряжений в грунте, в том числе, вызванных его собственным весом, на контактных поверхностях минеральных частиц возникают силы трения, препятствующие взаимным перемещениям частиц. Кроме этого, между минеральными частицами, пересекающими условную плоскость, имеются зоны зацепления (взаимного проникновения), создающие нагельный эффект. Таким образом, при сдвиге грунта по фиксированной плоскости возникает реакция, равная сумме сил трения по контактным поверхностям минеральных частиц. После преодоления сил трения происходит сдвиг грунта по фиксированной плоскости. При наличии зацепления между частицами сдвиг сопровождается переупаковкой минеральных частиц скелета грунта (рис. 2.2). Переупаковка скелета вызывает вначале доуплотнение грунта (дилатация), а при дальнейшем сдвиге – разуплотнение грунта (контракция). В предельном состоянии сдвиг грунта по фиксированной плоскости происходит без увеличения сдвигающей нагрузки. Таким образом, прочность несвязного грунта определяется уровнем действующих в нем сжимающих напряжений. Совершенно очевидно, что такой грунт не имеет прочности при одноосном напряженном состоянии, однако может обладать достаточно высокой прочностью при других видах напряженного состояния, которые возникают в грунтовом массиве при передаче на него нагрузок от фундаментов.



**Рис. 2.2. Схемы дилатационных явлений в песчаных и крупнообломочных грунтах:** а – исходное состояние; б – дилатация – доуплотнение от действия сдвиговых напряжений  $\tau$ ; в – контракция – разуплотнение под действием сдвиговых напряжений  $\tau$ ;  $h$  – исходная высота образца;  $\Delta h_d$  – уменьшение высоты образца за счет дилатации;  $\Delta h_k$  – увеличение высоты образца за счет контракции.



В первоначальном виде закон прочности сыпучей среды был сформулирован Кулоном в следующем виде: **касательные напряжения на площадке сдвига в состоянии предельного равновесия грунта пропорциональны нормальным напряжениям, действующим на этой площадке.** Впоследствии этот закон был распространен на связные грунты, обладающие отличной от нуля прочностью при нулевых значениях нормальных напряжений на площадке сдвига. На рис. 2.3 представлены графические построения, связанные с выводами различных форм представления закона прочности Кулона–Мора.

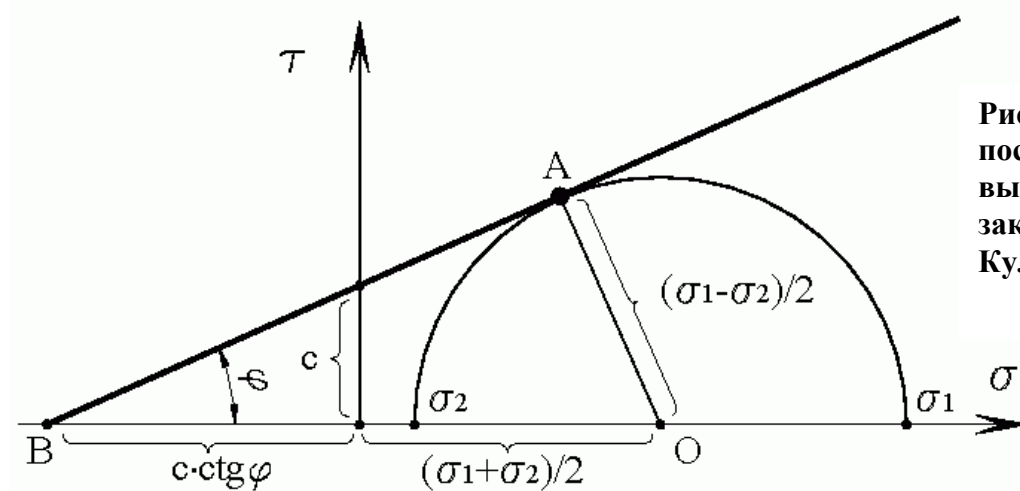


Рис. 2.3. Графическое построение для вывода уравнения закона прочности Кулона-Мора

Для площадки сдвига закон прочности Кулона–Мора имеет математическое выражение, уже известное нам из курса "Инженерные изыскания в строительстве":

$$\tau = c + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad (2.1)$$

где  $c$  – сцепление, параметр, соответствующий прочности грунта при нулевом значении нормального напряжения на площадке сдвига;

$\operatorname{tg} \varphi$  – коэффициент пропорциональности, равный тангенсу угла внутреннего трения;

$\varphi$  – угол внутреннего трения;

$\sigma$  – эффективные нормальные напряжения на площадке среза.

*Примечание.* Здесь под эффективными напряжениями следует понимать разницу между полными напряжениями и избыточным (по сравнению с атмосферным) давлением в поровой воде. Избыточное давление в поровой воде называют нейтральными напряжениями. Сумма эффективных и нейтральных напряжений всегда равна полному напряжению. Ниже (см. лекцию № 8) будет показано, что в условиях завершённой фильтрационной консолидации нейтральные напряжения равны нулю, а эффективные напряжения равны полным напряжениям. Таким образом, наличие порового давления снижает прочность грунта, а опыты по определению прочностных характеристик грунта должны проводиться по дренированно-консолидированной схеме.

Формуле (2.1) на графике (рис. 2.3) соответствует прямая, наклоненная к оси нормальных напряжений  $\sigma$  под углом внутреннего трения грунта  $\varphi$  и отсекающая на оси касательных напряжений  $\tau$  отрезок, численно равный сцеплению грунта  $c$ . Указанная прямая является огибающей предельных кругов Мора, соответствующих прочности грунта при различных уровнях нормальных напряжений на площадке сдвига. График по формуле (2.1) называют также **графиком прочности грунта, диаграммой прочности грунта или паспортом прочности грунта**. В соответствии с формулой (2.1) прочность грунта неограниченно возрастает при неограниченном увеличении нормальных напряжений на площадке сдвига. Последнее не согласуется с экспериментальными данными. Это объясняется тем, что при определенном уровне сжимающих напряжений в грунте происходят микроразрушения на контактах минеральных частиц, сдерживающие рост сил внутреннего трения. При очень высоком уровне сжимающих напряжений происходит разрушение материала минеральных частиц, и график прочности ниспадает до пересечения с осью нормальных напряжений. Однако уровень таких напряжений значительно превосходит уровень напряжений, действующих в основании фундаментов вплоть до исчерпания несущей способности основания. В связи с этим в практических расчетах оснований используют линейное уравнение прочности (2.1).

Уравнение (2.1) может быть использовано только в том случае, если заранее известна площадка сдвига, например, при плоском сдвиге фундамента относительно основания. В большинстве же случаев площадка сдвига заранее неизвестна. Поэтому представляют практический интерес другие формы записи уравнения прочности (2.1).

**Уравнения прочности в главных напряжениях.** Предельному состоянию грунта в точке  $A$  на графике прочности соответствует круг Мора, касающийся графика прочности в точке  $A$ , с главными напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ). Как известно, центр круга Мора отстоит от начала осей координат на расстоянии  $(\sigma_1 + \sigma_2) / 2$ , а его радиус равен  $(\sigma_1 - \sigma_2) / 2$ . Уравнение прочности в главных напряжениях вытекает из следующих преобразований:

$$\frac{OA}{OB} = \sin \varphi ; \quad OA = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} ; \quad OB = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi ;$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + 2c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \sin \varphi . \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) можно преобразовать к виду, содержащему отношение главных напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 - \sigma_2 &= \sin \varphi \sigma_1 + \sin \varphi \sigma_2 + 2c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi ; \\
 \sigma_1 - \sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi &= \sin \varphi (\sigma_1 + c \operatorname{ctg} \varphi) + \sin \varphi (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) ; \\
 (\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)(1 - \sin \varphi) &= (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)(1 + \sin \varphi) ; \\
 \frac{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} &= \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) ; \\
 \frac{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} &= \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Если в уравнениях (2.3) положить сцепление  $c$  равным нулю, то величина  $\operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2)$  будет представлять собой коэффициент бокового давления сыпучей среды в предельном состоянии. Этот коэффициент называют также коэффициентом **активного давления**. В отличие от этого коэффициент  $\operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi / 2)$  называют коэффициентом **пассивного давления**. Он позволяет вычислить действующее напряжение при известном боковом давлении в сыпучей среде. При  $\varphi = 0$  говорят, что среда является идеально связной. Полученное в лекции № 1 выражение для коэффициента бокового давления через коэффициент Пуассона справедливо в предельном состоянии только для идеально связной среды, например, для пластичной глины. Для сыпучей среды коэффициент бокового давления в предельном состоянии остается меньшим единицы.

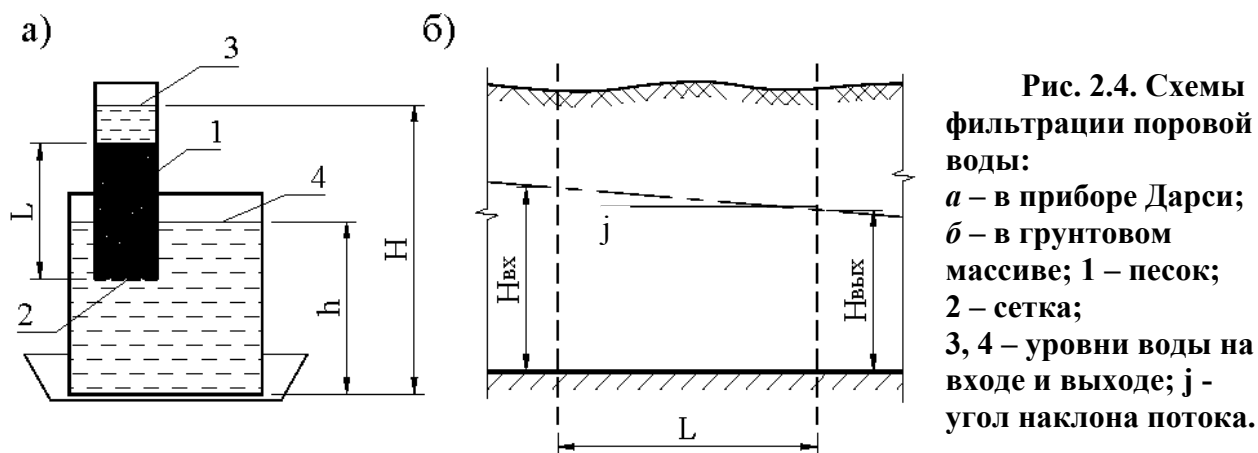
**Уравнение прочности в компонентах тензора напряжений.** Основным неудобством в применении уравнений (2.3) является необходимость вычисления в грунтовом массиве главных напряжений. Этого можно избежать подстановкой в уравнение (2.2) значений главных напряжений, выраженных через компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} ; \\
 \sigma_1 - \sigma_2 &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} ; \quad \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y ; \\
 \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}}{\sigma_x + \sigma_y + 2c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} &= \sin \varphi ; \quad \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}{(\sigma_x + \sigma_y + 2c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)^2} = \sin^2 \varphi . \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

**3. Закон ламинарной фильтрации Дарси** устанавливает зависимость скорости фильтрации поровой воды от градиента гидравлического напора. Как уже отмечалось, грунт является открытой термодинамической системой в отношении массопереноса в форме движения поровой воды. Движение поровой воды называют фильтрацией, а связанные с этим процессы – фильтрационными. Рассматриваются такие скорости, при которых не наблюдаются завихрения гидравлического потока. Такое движение характеризуется как спокойное или ламинарное. Гидравлическим напором называют давление в поровой воде, выраженное в единицах высоты эквивалентного водяного столба:  $H = p / \gamma_w$ , где  $\gamma_w$  – удельный вес воды. Градиентом гидравлического напора называют безразмерную величину, равную отношению разности гидравлических напоров на входе и выходе фильтрационного потока к длине пути фильтрации поровой воды:  $i = (H_{\text{вх.}} - H_{\text{вых.}}) / L = \text{tg } j$  (рис. 2.4 б). В опытах (рис. 2.4 а) Дарси измерял расход воды ( $\text{м}^3$ ) при фильтрации ее через цилиндр с песком площадью поперечного сечения  $A$ . Им получена следующая экспериментальная зависимость:

$$Q = k_f \cdot i \cdot A \cdot t,$$

где  $k_f$  – коэффициент пропорциональности, названный коэффициентом фильтрации;  $t$  – время фильтрации.



Определим понятие скорости фильтрации  $q$  ( $\text{м/с}$ ) как расход поровой воды через единицу поперечного сечения в единицу времени. Тогда из экспериментальной зависимости Дарси будем иметь:

$$q = k_f \cdot i. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) уже рассматривалась в курсе "Инженерные изыскания в строительстве" и известна как закон ламинарной фильтрации Дарси, который

можно сформулировать следующим образом: **скорость фильтрации поровой воды прямо пропорциональна градиенту гидравлического напора.**

Коэффициент фильтрации  $k_f$ , входящий в формулу (2.5), можно трактовать как скорость фильтрации поровой воды при градиенте гидравлического напора (говорят также, гидравлическом градиенте), равном единице. В соответствии с рисунком (2.4 б) единичному значению градиента гидравлического напора соответствует угол наклона поверхности грунтового потока к горизонтальной плоскости  $j = 45^\circ$ . Из приведенного выше определения следует, что коэффициент фильтрации имеет размерность скорости (м/с). В справочных материалах коэффициент фильтрации чаще всего приводится в м/сутки. Значения коэффициента фильтрации зависят от вида грунта и изменяются в широких пределах от 0,001 м/сутки для глин до 100 м/сутки для песков.

В формуле (2.5) фигурирует фиктивная скорость фильтрации, отнесенная к полному сечению грунта, включающему как сечения пор, так и сечения минеральных частиц. Так как фильтрация происходит только по сечениям пор, действительная скорость фильтрации выше фиктивной. Она может быть вычислена через пористость грунта:  $v = q / n$ . Действительная скорость учитывается при анализе суффозионных процессов в грунтах.

Реальные грунты обладают начальным гидравлическим сопротивлением. Это означает, что фильтрационные процессы протекают лишь при гидравлических градиентах, больших определенной величины. Эту величину называют **начальным гидравлическим градиентом  $i_0$** . Величина начального гидравлического градиента, как и коэффициент фильтрации, зависит от вида грунта. С учетом сделанного замечания, запишем окончательное выражение для закона ламинарной фильтрации Дарси:

$$q = k_f \cdot (i - i_0). \quad (2.6)$$

### **Лекция 3. Распределение напряжений в грунтовом массиве от действия внешних нагрузок. Задача Ж. Буссинеска и ее приложения.**

Проблемы распределения напряжений в грунтовом массиве рассматриваются в фазе его уплотнения. Как уже отмечалось, фаза уплотнения является стадией его напряженно-деформированного состояния, представляющей наибольший интерес для практики, так как при реальном проектировании напряжения в грунтовом массиве ограничиваются величиной, незначительно превышающей начальное критическое давление. Важнейшим следствием принципа линейной деформируемости, применимость которого находится в диапазоне напряжений, соответствующих фазе уплотнения, является правомерность использования для анализа напряженно-деформированного состояния грунтового массива аппарата теории упругости. При этом в указанном анализе модуль упругости должен быть заменен на модуль деформации, комплексно учитывающий развитие как упругих, так и пластических деформаций грунта. В общем случае задача о распределении напряжений в грунтовом массиве при заданных краевых условиях может быть сведена к решению дифференциальных уравнений равновесия, дополненных уравнениями совместности деформаций и физическими уравнениями в форме закона Гука. Такие задачи, как правило, решаются численными методами, так как получение для них замкнутых аналитических решений является весьма проблематичным (подынтегральные функции не являются, как правило, полными дифференциалами). По этой причине представляют особый практический интерес аналитические решения, полученные с использованием только уравнений равновесия на основании упрощающих гипотез. К таким решениям относится широко известная в механике грунтов задача Буссинеска о распределении напряжений в упругом полупространстве от действия вертикальной сосредоточенной силы на граничной плоскости. Представляют практический интерес не столько решения указанной задачи, сколько ее приложения. Используя принцип суперпозиций, решены задачи о распределении напряжений в грунтовом массиве при произвольной нагрузке на граничной плоскости полупространства, основанные на интегрировании решения Буссинеска. Такое же значение в механике грунтов имеет задача Фламана о распределении напряжений в полуплоскости при действии

вертикальной силы на ее границе в условиях отсутствия деформаций, нормальных полуплоскости (такое напряженно–деформированное состояние называется «плоская деформация»).

*Примечание: полупространством называют часть бесконечного (трехмерного) пространства, отсеченного бесконечной плоскостью; полуплоскостью называют часть бесконечной плоскости, отсеченной бесконечной линией (границей).*

**1. Решение задачи Буссинеска.** Основано на следующих гипотезах (в последствии подтвержденных точными решениями):

а) нормальные напряжения на площадках, касательных к сферической поверхности с центром в точке приложения силы, являются главными напряжениями. По этой причине касательные напряжения на указанных площадках отсутствуют;

б) нормальные напряжения, лежащие в вертикальной плоскости, на площадках, нормальных к сферической поверхности с центром в точке приложения силы, равны нулю;

в) нормальные напряжения на площадках, касательных к сферической поверхности с центром в точке приложения силы, прямо пропорциональны косинусу угла видимости и обратно пропорциональны квадрату радиуса сферы. Под углом видимости понимается угол между радиусом сферы, проведенным в центр площадки, и центральной вертикальной осью сферы.

Постулированные гипотезы позволяют получить замкнутые аналитические решения о распределении напряжений в полупространстве от действия вертикальной силы на его границе, основанные исключительно на уравнениях равновесия. Решение задачи поясняется графическими построениями на рис. 3.1, на котором представлены вертикальный разрез полупространства и его сечения горизонтальными плоскостями.

Начало прямоугольной декартовой системы координат разместим в точке приложения вертикальной силы  $P$  на границе полупространства. Ось  $z$  направим по вертикали вниз, ось  $x$  по горизонтали вправо, а ось  $y$  перпендикулярно плоскости чертежа. Относительно начала осей координат построена полусфера радиусом  $R$ , пересечение которой с вертикальной плоскостью, проходящей через центральную ось, образует полуокружность такого же радиуса. В сечении полусферы горизонтальной плоскостью на глубине  $z$  образуется окружность радиусом  $r$ . Угол видимости радиуса  $r$  на вертикальном разрезе обозначим  $\beta$ . В сечение полусферы горизонтальной

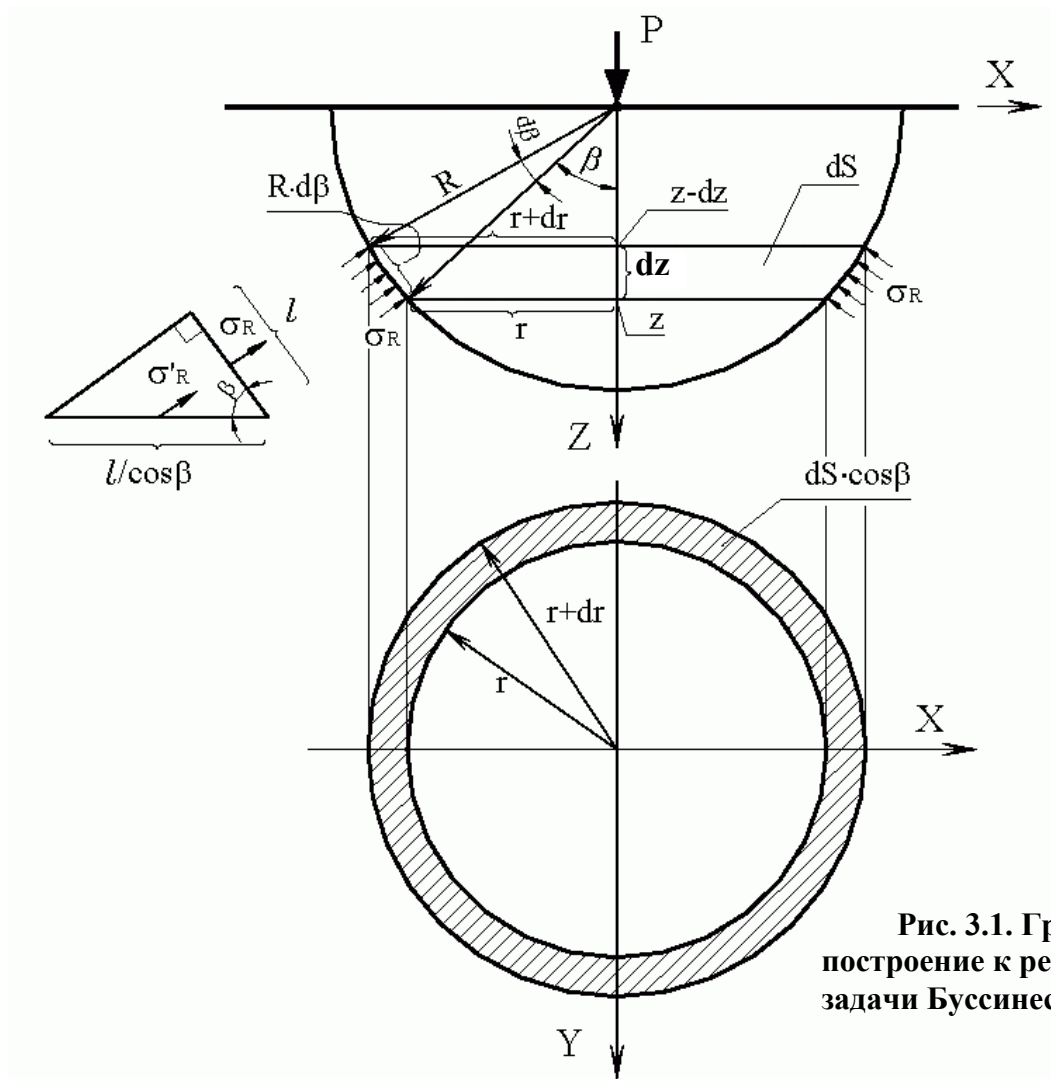


Рис. 3.1. Графическое построение к решению задачи Буссинеска.

плоскостью на глубине  $z - dz$  образуется окружность радиусом  $r + dr$  с углом видимости на вертикальном разрезе  $\beta + d\beta$ . Рассмотрим равновесие сферического кольца, выделенного из полусферы двумя горизонтальными плоскостями на глубине  $z$  и  $z - dz$ . С учетом того, что длина образующей сферического кольца равна  $Rd\beta$ , площадь его поверхности определится формулой:  $S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot R \cdot d\beta$ . На поверхности сферического кольца действуют нормальные напряжения  $\sigma_R$ , а касательные напряжения в соответствии с гипотезой а) отсутствуют. Найдём напряжения  $\sigma_R$  из условия равновесия проекций всех сил, действующих по поверхности полусферы радиусом  $R$ , на вертикальную ось  $z$ . Условие равновесия:

$$\int_0^{\pi/2} \sigma_R \cdot \cos \beta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot R \cdot d\beta - P = 0. \quad (3.1)$$



В соответствии с гипотезой в)  $\sigma_R = A \cdot \cos \beta / R^2$ . Кроме этого  $r = R \cdot \sin \beta$ . Подставляя в уравнение (3.1) выражения для  $\sigma_R$  и  $r$  и выполняя преобразования, получим:

$$2 \cdot \pi \cdot A \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \beta}{R^2} \cdot R^2 \cdot \sin \beta \cdot d\beta - P = 0;$$

$$2 \cdot \pi \cdot A \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta \cdot \sin \beta \cdot d\beta - P = 0. \quad (3.2)$$

Выполняем замену переменных в уравнении (3.2):  $u = \cos \beta$ ,  $du = -\sin \beta \cdot d\beta$ . Продолжая преобразования, получим выражение для неопределенного коэффициента  $A$ :

$$-2 \cdot \pi \cdot A \int_0^{\pi/2} u^2 \cdot du - P = 0;$$

$$-2 \cdot \pi \cdot A \cdot \left| \frac{u^3}{3} \right|_0^{\pi/2} - P = 0;$$

$$-2 \cdot \pi \cdot A \cdot \left| \frac{\cos^3 \beta}{3} \right|_0^{\pi/2} - P = 0;$$

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot A}{3} - P = 0; \quad A = \frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi}.$$

Выразим  $\cos \beta$  через ординату  $z$ :  $\cos \beta = z / R$ . С учетом этого формула для определения напряжения  $\sigma_R$  будут иметь вид:

$$\sigma_R = \frac{3 \cdot P \cdot \cos \beta}{2 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{3 \cdot P \cdot z}{2 \cdot \pi \cdot R^3}. \quad (3.3)$$

Практический интерес представляют напряжения на горизонтальной площадке, наклоненной к площадке, на которой действуют напряжения  $\sigma_R$ , под углом  $\beta$ . В соответствии с гипотезой б) главный вектор напряжений на горизонтальной площадке  $\sigma_R'$  совпадает по направлению с вектором напряжения  $\sigma_R$ , а его модуль равен  $\sigma_R' = \sigma_R \cdot \cos \beta$ . Проекции главного вектора напряжений  $\sigma_R'$  на координатные оси являются компонентами тензора напряжений на горизонтальной площадке. Поскольку главный вектор напряжений  $\sigma_R'$  совпадает по направлению с радиусом вектором  $R$ , направляющие косинусы вектора напряжений определяются формулами:

$$\cos(\sigma_R', z) = z/R; \quad \cos(\sigma_R', x) = x/R; \quad \cos(\sigma_R', y) = y/R \quad (3.4)$$

С учетом полученных выше зависимостей, компоненты тензора напряжений на горизонтальной площадке будут определяться формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_R' \cdot \frac{z}{R} = \sigma_R \cdot \frac{z}{R} \cdot \frac{z}{R} = \frac{3 \cdot P \cdot z^3}{2 \cdot \pi \cdot R^5}; \\ \tau_{zx} &= \sigma_R' \cdot \frac{x}{R} = \sigma_R \cdot \frac{x}{R} \cdot \frac{z}{R} = \frac{3 \cdot P \cdot x \cdot z^2}{2 \cdot \pi \cdot R^5}; \\ \tau_{zy} &= \sigma_R' \cdot \frac{y}{R} = \sigma_R \cdot \frac{y}{R} \cdot \frac{z}{R} = \frac{3 \cdot P \cdot y \cdot z^2}{2 \cdot \pi \cdot R^5}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формулу для  $\sigma_z$  обычно табулируют. Для этого выполняют следующие преобразования:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{r^2}{z^2}}; \\ \sigma_z &= \frac{3 \cdot P \cdot z^3}{2 \cdot \pi \cdot z^5 (1 + r^2 / z^2)^{5/2}} = \frac{P}{z^2} \cdot K; \\ K &= \frac{3}{2 \cdot \pi (1 + r^2 / z^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Коэффициент  $K$ , зависящий от безразмерного параметра  $r/z$ , приводится в справочных данных. Формулы (3.5) и (3.6) при  $z = 0$ , т.е. в точке приложения силы  $P$ , дают бесконечные значения напряжений. Теоретически это объясняется тем, что сила  $P$  действует на бесконечно малой площадке, в связи с чем напряжения на этой площадке стремятся к бесконечности. С практической точки зрения этот результат является некорректным и подлежит разрешению.

**2. Напряжения в грунтовом массиве от действия группы сил.** При нагружении линейно-деформируемой среды по аналогии с упругой средой применим принцип суперпозиций. Используя этот принцип, напряжение в грунтовом массиве от действия группы сил можно представить как сумму напряжений от действия отдельных сил. При этом слагаемые в указанной сумме могут определяться по формулам Буссинеска. Например, для загрузения грунтового массива по схеме, представленной на рис. 3.2, нормальное напряжение на горизонтальной площадке на глубине  $z$  может быть определено по формуле:

$$\sigma_z = \frac{1}{z^2} \cdot (P_1 \cdot K_1 + \dots + P_i \cdot K_i + \dots + P_n \cdot K_n) = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot K_i. \quad (3.7)$$

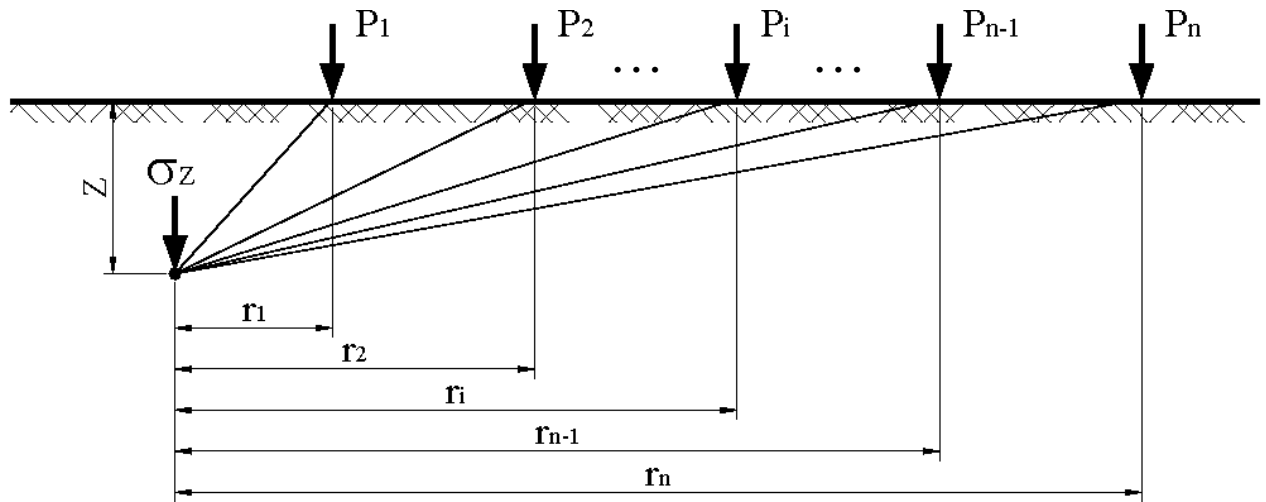


Рис. 3.2. Напряжение в грунтовом массиве от действия группы сил.

Анализ формулы (3.7) позволяет сделать следующий практически важный вывод: **при неизменных давлениях на основание увеличение площади его нагружения приводит к увеличению напряжений в грунтовом массиве.**

**3. Напряжения от нагрузки, распределенной по прямоугольнику.** Эта задача имеет большое прикладное значение, т.к. большинство фундаментов имеют прямоугольную форму подошвы в плане. Кроме этого, при определении напряжений от распределенной нагрузки разрешается некорректность формул (3.5) и (3.6) при  $z = 0$ . Изобразим загруженную поверхность в плане (рис. 3.3). Совместим оси координат с центральными осями прямоугольника, ограничивающего загруженную давлением  $p$  (кПа) поверхность. Обозначим размеры прямоугольника:  $L$ ,  $B$  – длина и ширина;  $l$ ,  $b$  – полудлина и полуширина. Выделим на загруженной поверхности бесконечно малую площадку с координатами в центре площадки  $\xi$  и  $\eta$  и площадью  $d\xi \cdot d\eta$ . Элементарная сила, действующая на площадку, будет равна:  $dP = p \cdot d\xi \cdot d\eta$ . Определим напряжение  $d\sigma_z$  в грунтовом массиве в точке с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  от элементарной силы  $dP$ , воспользовавшись формулой Буссинеска (3.5):

$$d\sigma_z = \frac{3 \cdot p \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot z^3}{2 \cdot \pi \cdot [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{5/2}}. \quad (3.8)$$

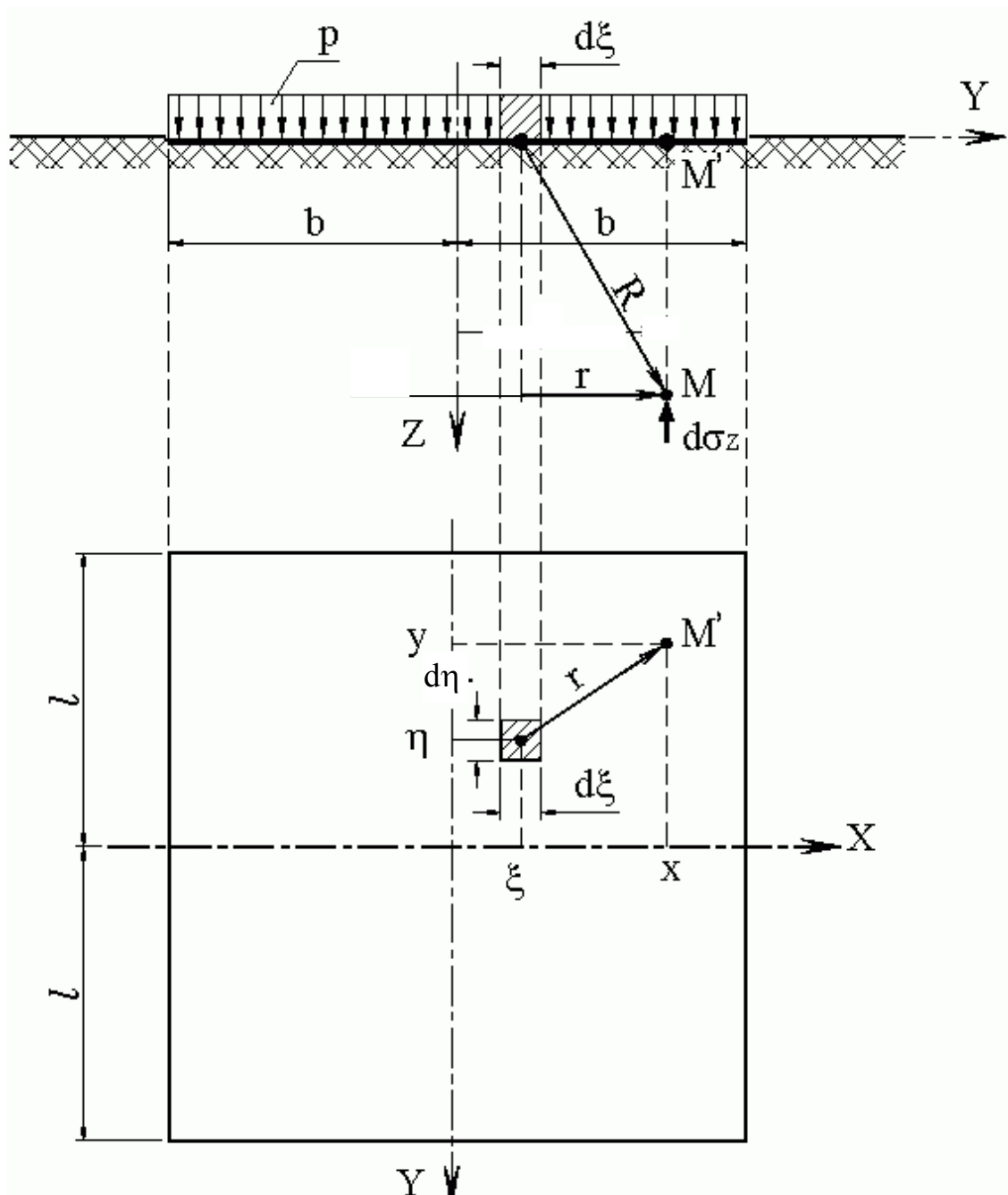


Рис. 3.3. Напряжение от нагрузки, распределенной по прямоугольнику:  
 $P$  – интенсивность нагрузки;  $l, b$  – полудлина и полуширина площади нагрузки.

В формуле (3.8) учтено, что радиус-вектор  $R$  соединяет точку с координатами  $x, y, z$ , в которой определяется напряжение, и точку с координатами  $\xi, \eta, 0$ , в которой действует элементарная сила. Для определения напряжения  $\sigma_z$  в точке с координатами  $x, y, z$  от всей загруженной площади проинтегрируем выражение (3.8) по загруженной площади:

$$\sigma_z = \frac{3 \cdot p}{2 \cdot \pi} \int_{-l}^l \int_{-b}^b \frac{z^3}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi \cdot d\eta. \quad (3.9)$$

Интеграл по формуле (3.9) имеет замкнутое аналитическое решение в тригонометрических функциях, впервые полученное в 1935 г. А. Лявом. Наиболее простые выражения для напряжений получаются по вертикалям в центральном сечении загруженной площади и по угловым точкам:  $\sigma_z = \alpha \cdot p$ ;  $\sigma_{zc} = \alpha_c \cdot p$ , где

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{l b z (l^2 + b^2 + 2z^2)}{(l^2 + z^2)(b^2 + z^2)\sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} + \operatorname{arctg} \left( \frac{l b}{z \sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} \right) \right];$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{L B z (L^2 + B^2 + 2z^2)}{(L^2 + z^2)(B^2 + z^2)\sqrt{L^2 + B^2 + z^2}} + \operatorname{arctn} \left( \frac{L B}{z \sqrt{L^2 + B^2 + z^2}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Формулы (3.10) использованы в СНиП на проектирование оснований для вычисления напряжений под подошвой фундамента в центральном сечении и в угловой точке. Анализ выражений (3.10) позволяет сформулировать следующее определение: **напряжения в угловой точке на глубине  $z$  равны  $1/4$  напряжений в центральной точке на глубине  $z/2$** . Это определение использовано в СНиП на проектирование оснований для вычисления коэффициента  $\alpha_c$  по табулированному значению коэффициента  $\alpha$ .

**4. Метод угловых точек.** Основывается по аналогии с формулой (3.7) на принципе суперпозиции. При этом для вычисления напряжений в любой точке грунтового массива используются формулы (3.10). Графические построения, связанные с техникой применения метода угловых точек для определения напряжений в грунтовом массиве, представлены на рис. 3.4. Различают два принципиально отличных случая применения метода угловых точек: вертикаль, по которой определяются напряжения, находится в пределах загруженной площади; вертикаль, по которой определяются напряжения, находится за пределами загруженной площади.

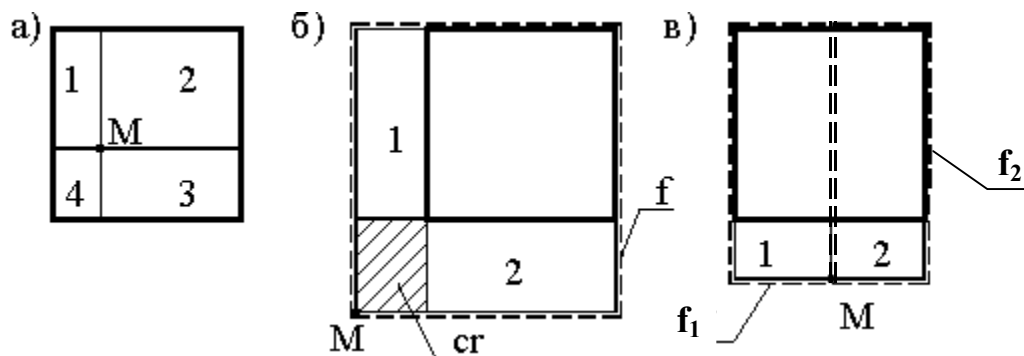


Рис. 3.4. Метод угловых точек: а – точка  $M$  расположена в пределах загруженной площади; б – точка расположена за пределами загруженной площади; в – точка  $M$  расположена за пределами загруженной площади в створе загруженной площади.

В первом случае (рис. 3.4 а) загруженная площадь разбивается на четыре прямоугольника, для которых точка, в которой определяется напряжение, является угловой. Напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_z = p \sum_{i=1}^4 \alpha_{c,i} , \quad (3.11)$$

где  $\alpha_{c,i}$  – коэффициенты по формуле (3.10) для прямоугольников 1 – 4.

Во втором случае (рис. 3.4 б) строится фиктивная площадь нагружения, границами которой являются две стороны прямоугольника с действительной нагрузкой, и точка, в которой определяется напряжение. Незагруженная площадь в фиктивном прямоугольнике разделяется на два пересекающихся прямоугольника, для которых, как и в первом случае, точка, в которой определяется напряжение, является угловой. Рассматриваются: прямоугольник, образующий фиктивную площадь нагружения ( $\alpha_{c,f}$ ); два пересекающихся прямоугольника ( $\alpha_{c,1}$  и  $\alpha_{c,2}$ ); прямоугольник области пересечения ( $\alpha_{c,cr}$ ). Напряжение вычисляется по формуле:

$$\sigma_z = p (\alpha_{c,f} - \alpha_{c,1} - \alpha_{c,2} + \alpha_{c,cr}) . \quad (3.12)$$

Здесь слагаемое, учитывающее влияние области пересечения, несмотря на отсутствие на ней нагрузки, входит в формулу со знаком «+», компенсируя тем самым двойное вычитание по этой области предыдущими членами формулы. Обобщая формулы (3.11) и (3.12), можно дать следующее определение методу угловых точек: **напряжение в произвольной точке от нагрузки, распределенной по прямоугольной площади, равно алгебраической сумме напряжений в угловых точках прямоугольников, для которых рассматриваемая точка является угловой, при этом алгебраическая сумма площадей этих прямоугольников с учетом знаков в формуле суммирования напряжений должна совпадать с фактической площадью нагрузки.** Используя это определение, непосредственно вытекающее из принципа суперпозиции, можно предложить самые различные схемы реализации метода угловых точек, например, для случая, представленного на рис. 3.4 в:

$$\sigma_z = p (\alpha_{c,f1} + \alpha_{c,f2} - \alpha_{c,1} - \alpha_{c,2}) . \quad (3.13)$$

## Лекция 4. Задача Фламана. Закономерности распределения давлений. Изобары, распоры, сдвиги. Контактные напряжения. Напряжения от собственного веса грунта.

1. Задача Фламана решена для плоского напряженного состояния при условии отсутствия поперечной деформации (плоская деформация) и методологически подобна задаче Буссинеска для полупространства. По этой причине рассмотрим лишь конечные результаты решения этой задачи. Пусть на поверхности полупространства (рис. 4.1) действует бесконечно протяженная полосовая нагрузка  $q$  (кН/м) вдоль координатной оси  $x$  единичной ширины.

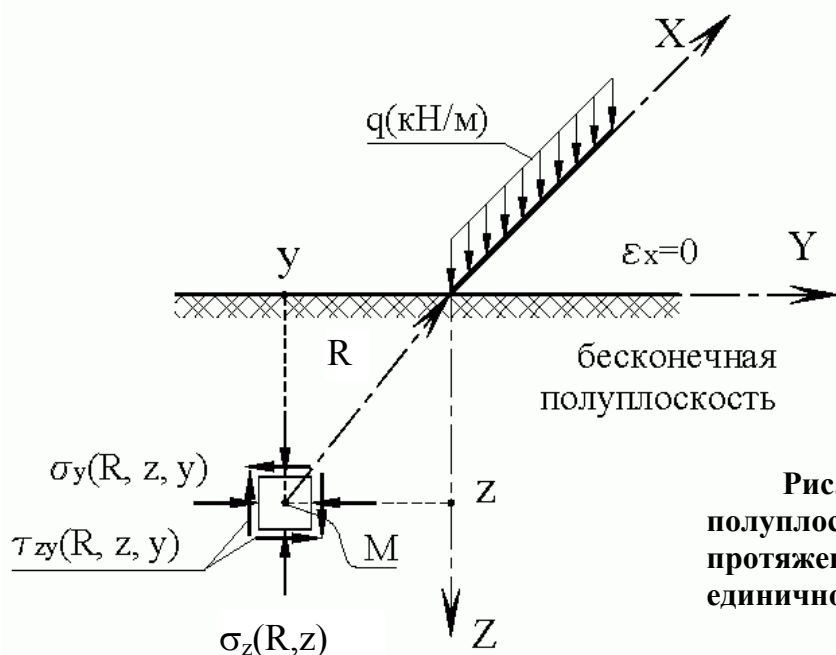


Рис. 4.1. Напряженное состояние полуплоскости от действия бесконечно протяженной полосовой нагрузки единичной ширины  $q$  (кН/м).

Тогда в сечениях полупространства плоскостями, нормальными к оси  $x$ , будем иметь полуплоскости, напряженно-деформированное состояние которых подобно, а деформация по направлению оси  $x$  равна нулю. Как уже отмечалось, такое напряженное состояние называется плоской деформацией. Напряжения в точке  $M$  полуплоскости с радиусом-вектором  $R$  и координатами  $y, z$  в соответствии с решением Фламана определяются формулами:

$$\sigma_z = \frac{2 \cdot q \cdot z^3}{\pi \cdot R^4}; \quad \sigma_y = \frac{2q \cdot y^2 \cdot z}{\pi \cdot R^4}; \quad \tau_{zy} = \frac{2 \cdot q \cdot y \cdot z^2}{\pi \cdot R^4}. \quad (4.1)$$

Практический интерес представляет распределение напряжений в полуплоскости от действия бесконечно протяженной полосовой нагрузки (рис. 4.2) конечной ширины  $B$ . Подобное напряженное состояние возникает в поперечных сечениях основания протяженного ленточного фундамента.





Можно показать, что  $\beta_0 = \beta_I + \alpha/2$ . При  $\beta_0 = 0$   $\beta_I = -\alpha/2$ , а  $\beta_2 = \alpha/2$ . Отсюда следует, что нормальные напряжения  $\sigma_z$  по оси симметрии полосовой нагрузки являются главными напряжениями, так как касательные напряжения  $\tau_{zy}$  на площадках действия указанных напряжений равны нулю. Напряженному состоянию с компонентами тензора напряжений (4.2) соответствуют главные напряжения:

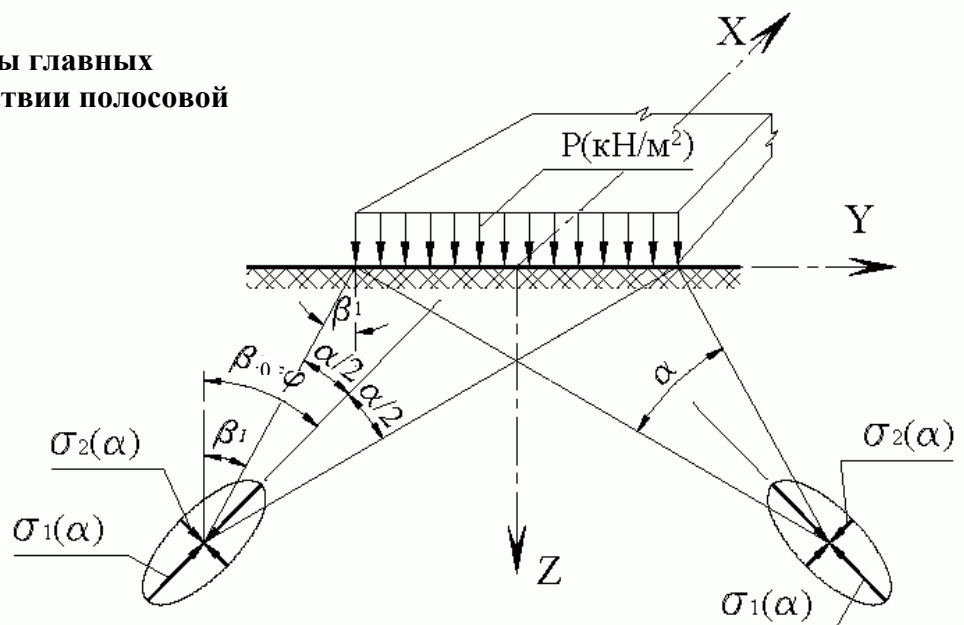
$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha); \\ \sigma_2 &= \frac{p}{\pi} (\alpha - \sin \alpha).\end{aligned}\quad (4.3)$$

Угол наклона площадки большего главного напряжения к площадке напряжения  $\sigma_z$  будет равен:

$$\sin 2\varphi = \frac{\tau_{zy}}{(\sigma_1 - \sigma_2)/2} = \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\beta_0}{\sin \alpha} = \sin 2\beta_0; \quad \varphi = \beta_0. \quad (4.4)$$

Из уравнения (4.4) следует, что нормалью к площадке больших главных напряжений является биссектриса угла видимости  $\alpha$ . Говорят также, что большая главная ось эллипса напряжений в точке  $M$  совпадает по направлению с биссектрисой угла видимости в этой точке (рис. 4.3). Можно доказать (рис. 4.4), что геометрическим местом точек с одинаковыми значениями главных напряжений являются окружности, проведенные через крайние точки полосовой нагрузки.

**Рис. 4.3. Эллипсы главных напряжений при действии полосовой нагрузки.**



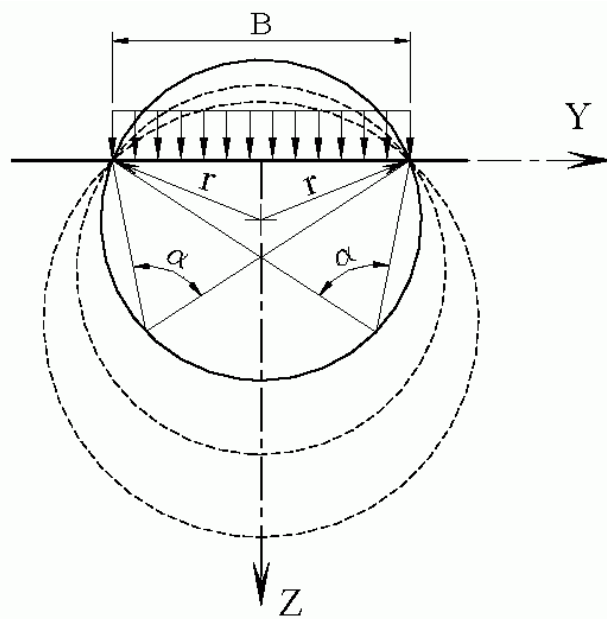


Рис. 4.4. Изолинии равных главных напряжений при действии полосовой нагрузки.

## 2. Закономерности распределения напряжений. Изобары, распоры, сдвиги.

Изобарами называют линии равных вертикальных давлений (рис. 4.5 а). Распорами называют линии равных боковых давлений (рис. 4.5 б). Сдвигами называют линии равных касательных напряжений (рис. 4.5 в). Указанные линии строятся как графики  $\sigma_z = \text{const}$ ,  $\sigma_y = \text{const}$ ,  $\tau_{zy} = \text{const}$ , например, с использованием уравнений (4.2). С удалением от центра загруженной поверхности и с увеличением глубины вертикальные давления уменьшаются. При этом линии равных давлений подобны concentric эллипсам с главной вертикальной осью, проходящей через центр загруженной поверхности. Горизонтальными сечениями изобар можно проследить закономерности изменения давлений по ширине грунтового массива. Общая закономерность сводится к следующему. С увеличением глубины интенсивность давлений уменьшается, а зона их действия по ширине увеличивается. При

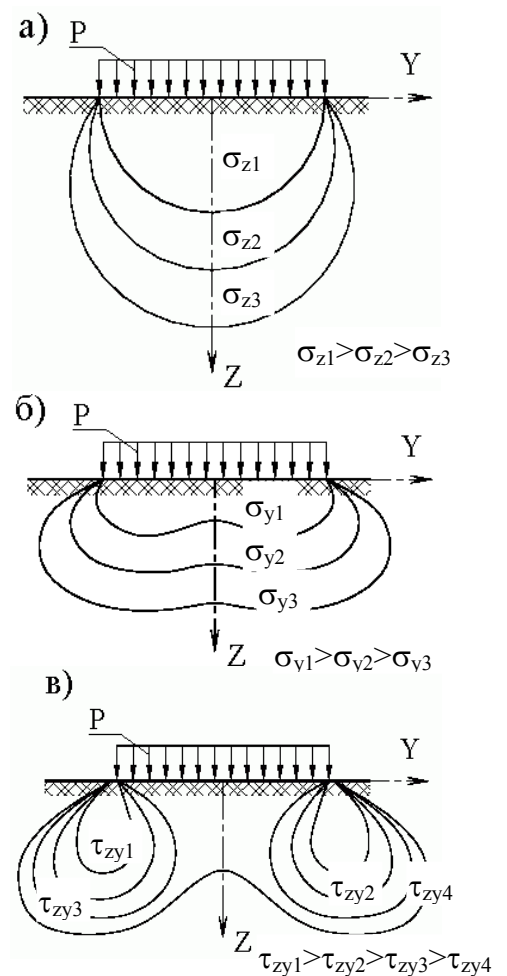


Рис. 4.5. Изолинии главных напряжений в грунтовом массиве при действии полосовой нагрузки: а – изобары; б – распоры; в – сдвиги.

этом площади эпюр давлений в горизонтальных сечениях остаются постоянными. В несвязных грунтах можно приблизительно полагать, что область распределения давлений в грунтовом массиве ограничена расходящимися лучами, исходящими из крайних точек загруженной поверхности и наклоненными к горизонтали под острыми углами, равными углу внутреннего трения.

Распределение распоров характеризуется наличием седловидной впадины в центре загруженной поверхности. Максимальных значений распоры достигают на границах области распределения вертикальных давлений.

Сдвиги распределяются в форме двух симметричных зон с центрами по краям загруженной поверхности. Геометрически указанные распределения подобны концентрическим эллипсам, главные большие оси которых наклонены и расходятся от центра загруженной поверхности. Максимальные значения сдвигов достигаются (концентрируются) в крайних точках загруженной поверхности. Этот результат уже использовался при описании фаз напряженно-деформированного состояния грунтового основания.

**3. Контактные напряжения.** До сих пор изучались вопросы распределения напряжений от действия распределенной по площади нагрузки. Нагрузка передавалась непосредственно на поверхность грунтового массива без посредства какой-либо конструкции. Такая схема передачи нагрузки характерна при возведении на основании земляных сооружений, например, насыпей, при передаче нагрузки через гибкую плиту и т.п. Во всех этих случаях говорят, что нагрузка передается на основание через абсолютно гибкий штамп. Таким образом, **абсолютно гибким штампом** называют конструкцию, сопротивлением изгибу которой можно пренебречь. Нагрузка на основание от сооружений чаще всего передается через жесткие конструкции, называемые фундаментами. Если собственными деформациями такой конструкции можно пренебречь, ее называют **абсолютно жестким штампом**. Все остальные конструкции, через которые передается нагрузка на основание, называют **фундаментами** (говорят также, штампами **конечной жесткости**). **Контактными напряжениями** называют напряжения на контакте поверхности основания с нижней поверхностью конструкции, через которую передаются нагрузки. Нижняя поверхность такой конструкции называется **подошвой фундамента**. Вертикальные напряжения, действующие на основание со стороны подошвы фундамента, называют **давлениями**. Уравновешивающие

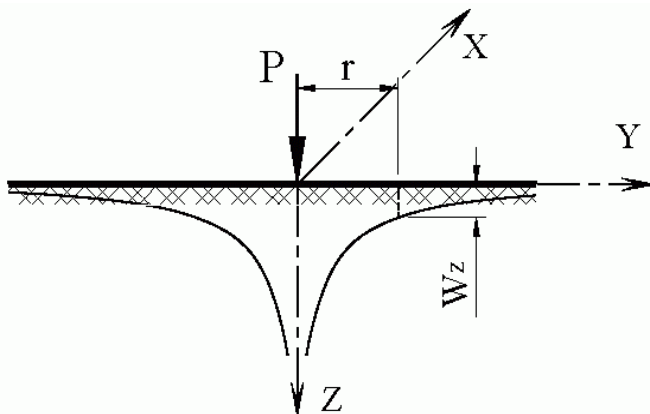
эти давления напряжения, действующие на подошву фундамента со стороны основания, называют **отпором грунта**. Решим задачу о распределении давлений на основание под жестким штампом при действии на него вертикальной нагрузки.

Воспользуемся формулой, полученной Буссинеском, для определения осадок (вертикальных перемещений)  $w_z$  поверхности линейно-деформируемого полупространства (рис. 4.6) от действия сосредоточенной силы  $P$ :

$$w_z = \frac{P \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot r}, \quad (4.5)$$

где  $\nu, E$  – коэффициент Пуассона и модуль деформации грунта;

$r$  – расстояние от точки приложения силы до точки, в которой вычисляется осадка (радиус-вектор).



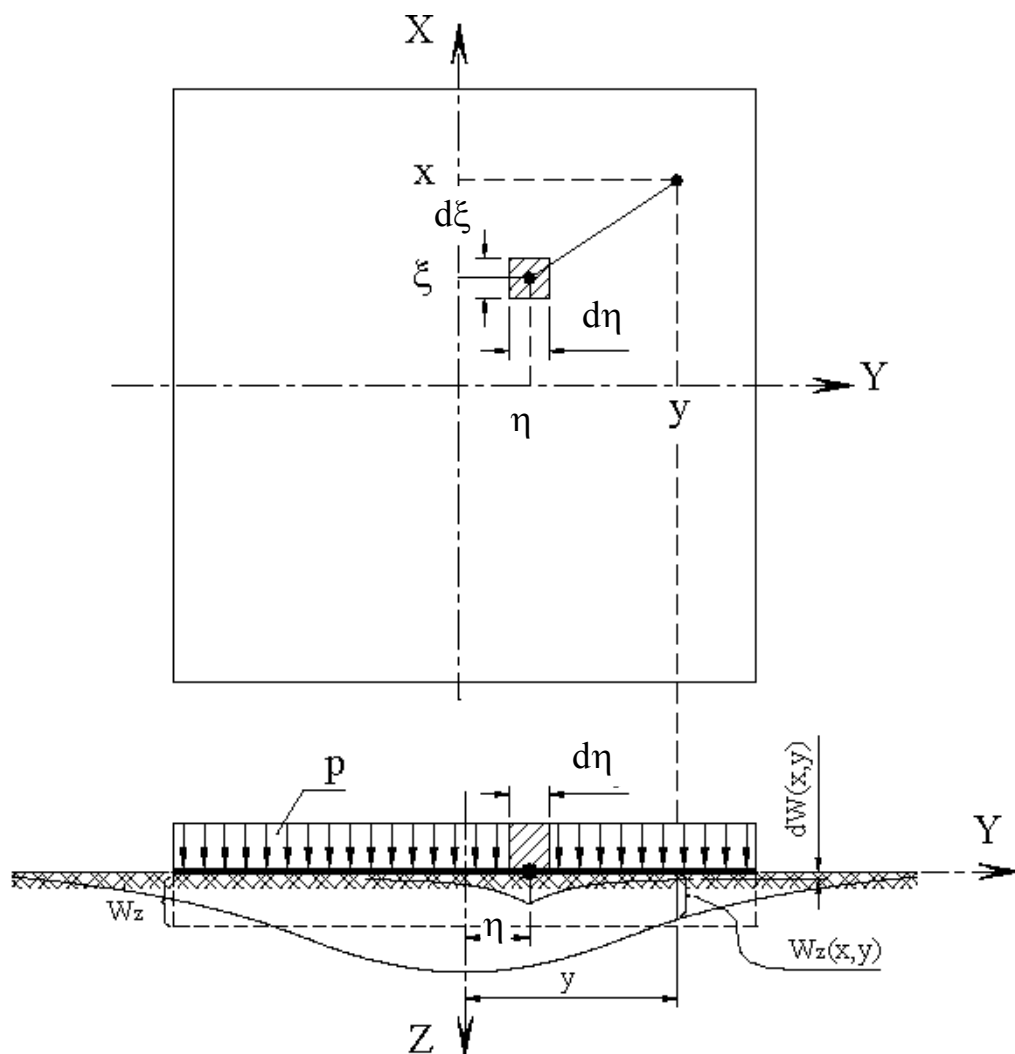
**Рис. 4.6. Осадка поверхности упругого полупространства от действия сосредоточенной силы.**

Используя формулу (4.5), определим осадку в точке с координатами  $x, y$  (рис. 4.7) от распределенной по площади  $F$  нагрузки интенсивностью  $p$  (кН/м<sup>2</sup>). При этом учтем, что элементарная сосредоточенная сила  $dP = p \cdot d\xi \cdot d\eta$ , а радиус-вектор  $r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$ .

$$w_z(x, y) = \frac{p \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E} \iint_F \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}. \quad (4.6)$$

Исследованиями по теории упругости установлено, что осадка абсолютно жесткого штампа с достаточной для практических целей точностью равна средней осадке абсолютно гибкого штампа. Средняя осадка абсолютно гибкого штампа может быть вычислена интегрированием по площади выражения (4.6) с последующим делением результата на площадь подошвы  $F$ :

$$w_z = \left( \iint_F w_z(x, y) dx \cdot dy \right) / F. \quad (4.7)$$



**Рис. 4.7. Осадка поверхности упругого полупространства от действия распределенной по площади  $F$  нагрузки интенсивностью  $p$  (кН/м<sup>2</sup>).**

Принимаем в выражении (4.6)  $w_z(x, y) = w_z = \text{const}$  и разрешая его относительно  $p$  как функции  $x, y$ , получим формулу для распределения давлений  $p(x, y)$  под абсолютно жестким штампом:

$$p(x, y) = \frac{\pi \cdot E \cdot w_z}{1 - \nu^2} \left( \iint_F \frac{d\xi \cdot d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right)^{-1}. \quad (4.8)$$

Наиболее простой вид решение уравнения (4.8) приобретает для штампа круглой формы в плане:

$$p(x, y) = \frac{p_m}{2\sqrt{1 - (r/R)^2}}, \quad (4.9)$$

где  $p_m$  – среднее давление под подошвой штампа;  $r$  – радиус-вектор точки, в которой вычисляется контактное давление  $p(x, y)$ ;  $R$  – радиус круглого штампа.

Аналогичное решение получено для плоской задачи (плоская деформация). Формула для вычисления контактных давлений под абсолютно жесткой бесконечной полосой имеет вид:

$$p(y) = \frac{2 \cdot p_m}{\pi \sqrt{1 - (y/b)^2}}, \quad (4.10)$$

где  $y$  – координата точки, в которой определяется давление  $p(y)$ ;  $b$  – половина ширины полосы.

В помещаемой ниже таблице приведены сопоставительные данные о распределении контактных давлений под штампами разной конструкции при одинаковом значении среднего давления.

Таблица 4.1.

Конструкция штампа	Абсолютно жесткий круглый диаметром $R$	Абсолютно жесткая полоса шириной $2 \cdot b$	Абсолютно гибкая полоса шириной $2 \cdot b$
Давление в центре	$p_m / 2$	$2 \cdot p_m / \pi$	$p_m$
Давления по краям	$\infty$	$\infty$	$p_m$

Как следует из таблицы, давления в центре жестких штампов меньше средних давлений. При удалении от центра контактные давления возрастают и стремятся к бесконечности в краевых точках. Давления в центре и по краям гибкого штампа равны заданному давлению на загруженной поверхности. Таким образом, конструкция штампа существенно влияет на характер распределения контактных давлений. Данные таблицы 4.1 интерпретированы графически на рис. 4.8. На этом же рисунке представлены графики распределения контактных давлений под штампами конечной жесткости. Анализируя эти графики, можно сделать следующий вывод: **контактные давления под штампами конечной жесткости находятся в диапазоне соответствующих давлений для абсолютно жесткого и абсолютно гибкого штампов.** Следует также обратить внимание на то, что в реальных грунтах контактные давления не могут неограниченно возрастать, так как их значения ограничиваются параметрами прочности основания.

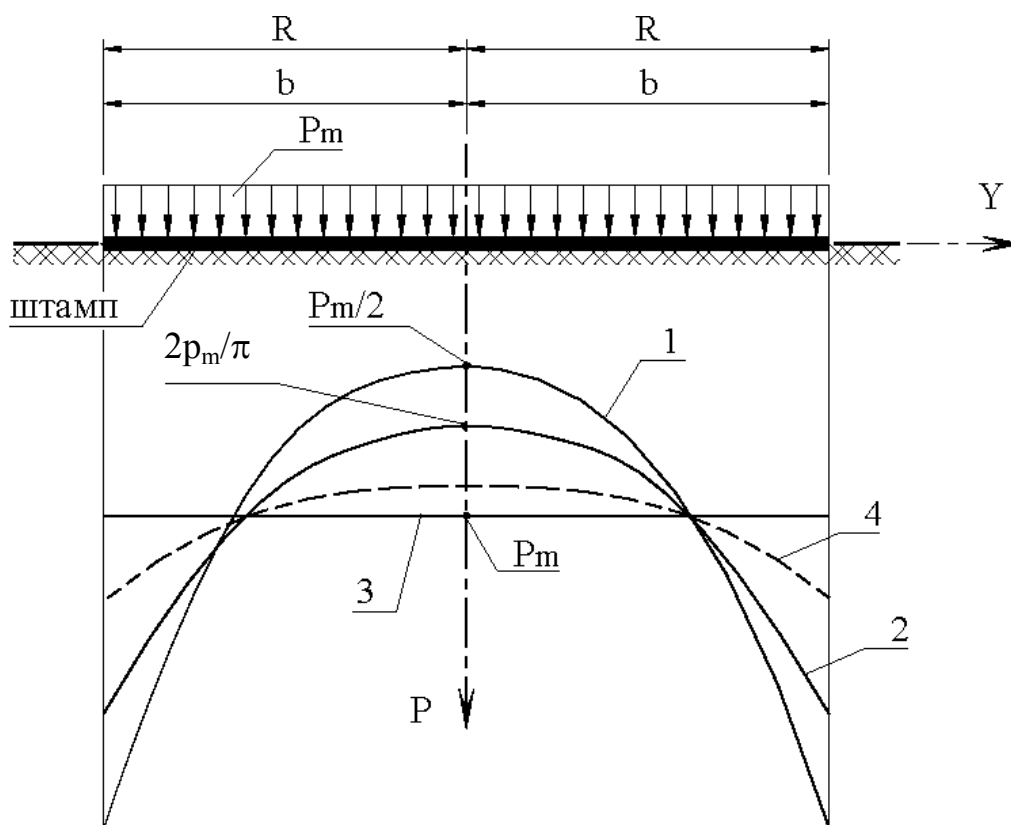


Рис. 4.8. Распределение контактных давлений по подошве: 1 – абсолютно жесткого круглого штампа; 2 – абсолютно жесткой полосы; 3 – абсолютно гибкой полосы; 4 – штампа конечной жесткости.

На основании обобщения результатов теоретических и экспериментальных исследований фундаментов конечной жесткости на грунтовых основаниях в нормах на проектирование оснований принят линейный закон распределения контактных давлений по подошве фундаментов. Эта гипотеза равносильна гипотезе плоских сечений в теории строительных конструкций. В связи с этим контактные давления определяются по упрощенной формуле:

$$p_{\min}^{\max} = \frac{P}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}, \quad (4.11)$$

где  $P$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  – продольная сила и изгибающие моменты относительно центральных осей на уровне подошвы фундамента;

$A$ ,  $W_x$ ,  $W_y$  – площадь подошвы и моменты сопротивления площади подошвы фундамента относительно центральных осей.

**4. Напряжения от собственного веса грунта.** Вертикальные напряжения от собственного веса грунта называют **бытовыми давлениями**, а график их изменения по глубине – **эпюрой бытовых давлений**. Напряжения от собственного веса грунта определяются на основании следующих упрощающих гипотез: 1) напряженным состоянием грунта при действии его собственного

веса является осесимметричное компрессионное сжатие; 2) вертикальные напряжения в грунте определяются суммированием напряжений от веса элементарных слоев грунта; 3) грунт, находящийся ниже уровня грунтовых вод, испытывает взвешивающее действие воды; 4) слой грунта, находящийся ниже водоносного слоя, называется **водоупором** и испытывает на своей поверхности гидростатическое давление водяного столба.

Удельный вес грунта во взвешенном состоянии определяется на основании следующих расчетов. Обозначим:  $G_{sb}$  (кН) – вес грунта объемом  $V$  (м<sup>3</sup>) во взвешенном состоянии;  $G_s, V_s$  – вес и объем частиц грунта в объеме  $V$ ;  $\gamma_d, \gamma_s$ , и  $\gamma_w$  – удельные веса сухого грунта, частиц грунта и воды. Определим  $G_{sb}$  и  $\gamma_{sb}$  – удельный вес грунта во взвешенном состоянии:

$$G_{sb} = G_s - V_s \gamma_w = V \gamma_d - \frac{G_s}{\gamma_s} \gamma_w = V \gamma_d - \frac{V \gamma_d}{\gamma_s} \gamma_w = V \frac{\gamma_d}{\gamma_s} (\gamma_s - \gamma_w) = V \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e_0}$$

$$\gamma_{sb} = \frac{G_{sb}}{V} = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e_0}. \quad (4.12)$$

С учетом сделанных замечаний, бытовые давления в грунте определяются методом послойного суммирования:

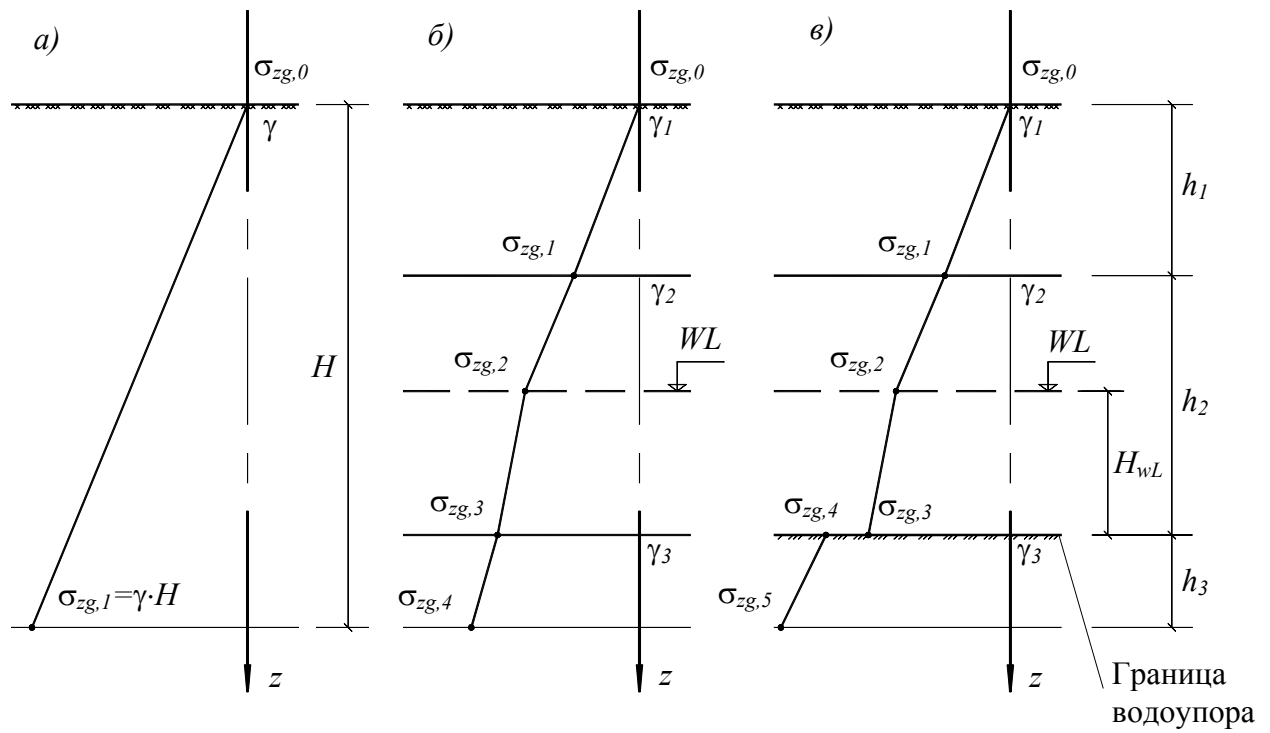
$$\sigma_{zg,i} = \sigma_{zg,i-1} + \gamma_i \cdot h_i + k \cdot H_{wL} \cdot \gamma_w; \quad i = 1 \dots n; \quad \sigma_{zg,0} = 0, \quad (4.13)$$

где  $\gamma_i - \gamma$  или  $\gamma_{sb}$  для  $i$ -го слоя грунта;  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя грунта;

$H_{wL}$  – расстояние от водоупора до уровня грунтовых вод;  $k$  – коэффициент, равный 1 для границы водоупора и 0 в остальных случаях.

Формула (4.13) используется для вычисления бытовых давлений на границах геологических слоев, на линии уровня грунтовых вод и на границе водоупора. В остальных сечениях бытовые давления могут быть определены по линейной интерполяции. На рис. 4.9 представлены характерные эпюры бытовых давлений в грунтовом массиве. На границах геологических слоев угол наклона эпюры, как правило, изменяется в связи с изменением величины удельного веса грунта. На линии уровня грунтовых вод ( $WL$ ) имеет место самый заметный перегиб эпюры, вызванный уменьшением удельного веса грунта во взвешенном состоянии. На границе водоупора эпюра имеет скачок на величину гидростатического давления от веса столба воды над водоупором.





**Рис. 4.9. Характерные эпюры распределения бытовых напряжений в массиве грунта: а) – однородный массив; б) – массив, представленный тремя инженерно-геологическими элементами; в) – то же, но при этом третий слой является водоупором.**

## **Лекция 5. Теория предельного напряженного состояния грунта. Задача Пузыревского. Начальные и предельные критические давления. Огибающие зон предельного равновесия. Давление грунта на подпорные стены. Устойчивость подпорных стен.**

Предельное напряженное состояние грунта принято анализировать методами предельного равновесия. В современной механике грунтов применяются также методы, основанные на решении смешанной задачи теории упругости и теории пластичности, а также методы теории пластического течения. Уравнения метода предельного равновесия для условий плоской задачи имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \gamma = 0; \quad \frac{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + 4\tau_{yz}^2}{(\sigma_y + \sigma_z + 2c \operatorname{ctg} \varphi)^2} = \sin^2 \varphi, \quad (5.1)$$

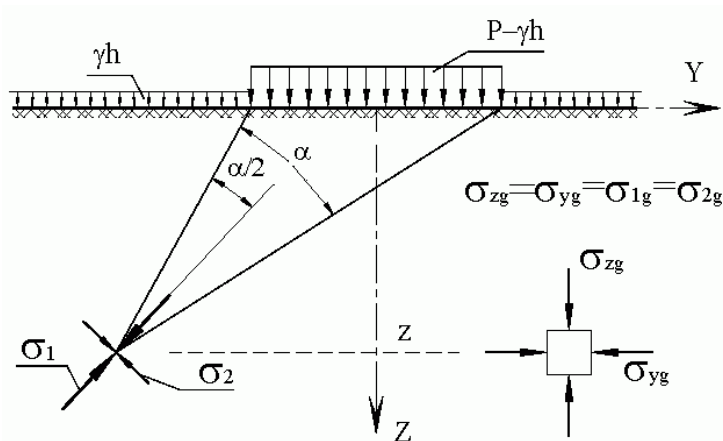
где  $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}$  – компоненты тензора напряжений;  $\gamma$  – удельный вес грунта;  $c, \varphi$  – параметры прочности грунта.

Решение системы уравнений (5.1) совместно с краевыми условиями позволяет установить зоны, в которых грунт находится в состоянии предельного равновесия.

**1. Предельное напряженное состояние грунта под полосовой нагрузкой. Задача Пузыревского.** Основными гипотезами, при которых решена задача Пузыревского, являются следующие: 1) компоненты напряжений распределяются в грунтовом массиве в соответствии с решением Фламана для плоской деформации; 2) коэффициент бокового давления грунта в предельном состоянии равен единице. Экспериментальными исследованиями установлено, что введенные гипотезы позволяют получать решения с точностью, достаточной для практики.

Пусть на поверхности грунтового массива (рис. 5.1) задана полосовая нагрузка интенсивностью  $p - \gamma \cdot h$  и бесконечно протяженная распределенная нагрузка интенсивностью  $\gamma \cdot h$ , так что в пределах полосы суммарная интенсивность нагрузки составляет  $p$  (кН/м<sup>2</sup>). Нагрузку  $\gamma \cdot h$  можно рассматривать как пригруз поверхности грунтового массива насыпью высотой  $h$ . Напряжения в грунтовом массиве будут складываться из напряжений от полосовой нагрузки интенсивностью  $p - \gamma \cdot h$  и напряжений от собственного веса грунта с учетом насыпи на его поверхности высотой  $h$ . Используя формулы для определения указанных напряжений, полученные ранее, будем иметь:

$$\sigma_1 = \frac{p - \gamma h}{\pi}(\alpha + \sin \alpha) + \gamma(h + z); \quad \sigma_2 = \frac{p - \gamma h}{\pi}(\alpha - \sin \alpha) + \gamma(h + z). \quad (5.2)$$



**Рис. 5.1. Расчетная схема к определению начального критического давления при действии полосовой нагрузки:**  
 $\sigma_1, \sigma_2$  – главные напряжения от действия полосовой нагрузки  $P-\gamma \cdot h$ , распределенной нагрузки  $\gamma \cdot h$  и собственного веса грунта  $\gamma \cdot z$ ;  
 $\sigma_{zg}, \sigma_{yg}, \sigma_{1g}, \sigma_{2g}$  – напряжения от собственного веса грунта  $\gamma \cdot z$ .

Полученные формулы являются решением системы дифференциальных уравнений равновесия (5.1) применительно к рассматриваемой задаче. Условие предельного равновесия примем в форме закона Кулона–Мора для главных напряжений:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + 2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \sin \varphi; \quad (5.3)$$

Подставляя напряжения (5.2) в формулу (5.3), получим уравнение предельного равновесия весомого грунта под полосовой нагрузкой с учетом пригруза на поверхности:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{p - \gamma \cdot h}{\pi} \cdot 2 \cdot \sin \alpha}{\frac{p - \gamma \cdot h}{\pi} \cdot 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \gamma \cdot (h + z) + 2 \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \sin \varphi; \\ & \frac{p - \gamma \cdot h}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{p - \gamma \cdot h}{\pi} \cdot \alpha + \gamma \cdot (h + z) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi; \\ & \frac{p - \gamma \cdot h}{\pi} \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} - \alpha \right) = \gamma \cdot (h + z) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi; \\ & p = \frac{\pi (\gamma \cdot h + \gamma \cdot z + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi)}{\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} - \alpha} + \gamma \cdot h. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Полученное уравнение предельного равновесия устанавливает зависимость между интенсивностью полосовой нагрузки  $p$  и координатами точки предельного равновесия  $z$  и  $\alpha$ . Варьируя значениями координат  $z$  и  $\alpha$ , можно

установить области пластического деформирования грунта при  $p = const$ . Такие решения справедливы для малых областей пластического деформирования и весьма приближенны для развитых пластических зон. Объясняется это тем, что в основе формулы (5.4) лежит решение о распределении напряжений в грунтовом массиве в упругой постановке. В действительности напряжения в пластических зонах не подчиняются законам упругости. Поэтому с развитием пластических зон уменьшается достоверность результатов решения задачи по формуле (5.4). Практический интерес представляет минимальное значение полосовой нагрузки при развитии зон пластического деформирования на глубину  $z$ . Этому значению нагрузки соответствует максимальное значение знаменателя в формуле (5.4). Значение координаты  $\alpha$ , соответствующее максимальному значению знаменателя, определяется из уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \cdot \left( \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} - \alpha \right) &= 0 ; & \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi} - 1 &= 0 ; \\ \cos\alpha &= \sin\varphi ; & \alpha &= \frac{\pi}{2} - \varphi ; & \sin\alpha &= \cos\varphi . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подстановкой выражений (5.5) в формулу (5.4) получаем критическое значение полосовой нагрузки, соответствующее развитию зон пластического деформирования на глубину  $z$ :

$$p_{кр} = \frac{\pi}{ctg\varphi + \varphi - \pi/2} (\gamma \cdot z + \gamma \cdot h + c \cdot ctg\varphi) + \gamma \cdot h . \quad (5.6)$$

**Начальным критическим давлением** называют интенсивность нагрузки, которая соответствует началу образования зон пластического деформирования. Таким образом, начальное критическое давление при полосовой нагрузке может быть определено по формуле (5.6) при подстановке в нее нулевого значения координаты  $z$ :

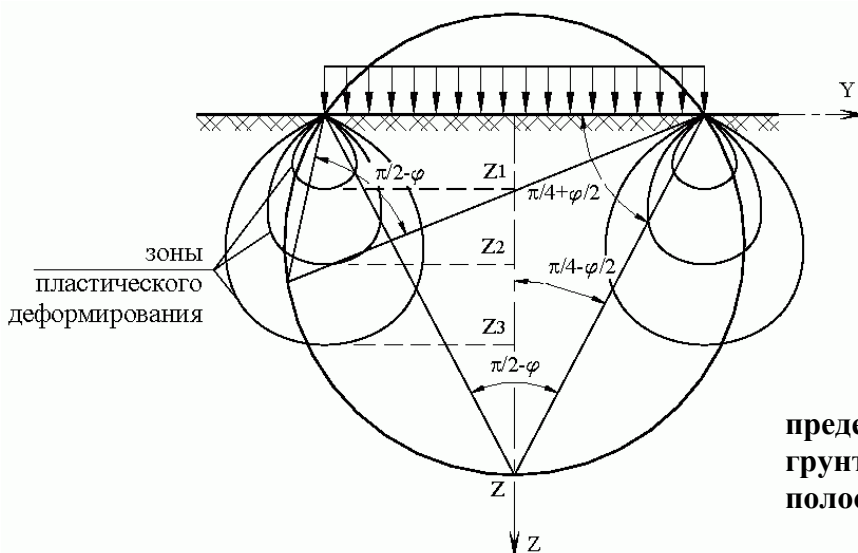
$$^{нач} p_{кр} = \frac{\pi}{ctg\varphi + \varphi - \pi/2} \cdot (\gamma \cdot h + c \cdot ctg\varphi) + \gamma \cdot h . \quad (5.7)$$

Выражение (5.7) является формулой Пузыревского, полученной им для равномерно распределенной нагрузки по полосе в условиях плоской деформации. Имеются аналогичные решения для других видов напряженного состояния и нагрузок, например, решение Прандтля для осесимметричной пространственной задачи при распределении нагрузки по кругу и т.п. Из

формулы (5.7) следует, что грунтовое основание обладает несущей способностью даже в том случае, когда равны нулю прочностные характеристики грунта  $c$  и  $\varphi$ . В этом случае его прочность обеспечивается пригрузом (слагаемое  $\gamma \cdot h$ ). Использование пригруза для повышения прочности основания является основным методом строительства на слабых грунтах (илах, торфах). Как уже отмечалось, начальное критическое давление является границей между фазами уплотнения и сдвига. Поскольку в фазе уплотнения применим принцип линейной деформируемости, говорят также, что начальное критическое давление является пределом пропорциональности между давлениями и осадками (напряжениями и деформациями). В нормах строительного проектирования в качестве предела пропорциональности принимают величину, несколько превышающую начальное критическое давление, называемую расчетным сопротивлением грунта. **Расчетное сопротивление грунта** это критическое давление, при котором зоны пластического деформирования распространяются на глубину  $B/4$ , где  $B$  – ширина фундамента. Величину расчетного сопротивления грунта можно оценить с помощью формулы (5.6) при подстановке в нее вместо  $z \rightarrow B/4$ .

**2. Огибающие зон предельного равновесия. Предельное критическое давление.** Выполним качественный анализ формирования зон предельного равновесия с помощью формулы (5.6). Траектория точек с одинаковыми значениями углов видимости изобразится в виде окружности, симметричной относительно полосовой нагрузки и проходящей через крайние точки этой нагрузки. Для угла видимости  $(\pi/2 - \varphi)$ , соответствующего минимальному значению нагрузки при распространении зон пластического деформирования на глубину  $z$ , графические построения представлены на рис. 5.2.

Зоны пластического деформирования зарождаются по краям нагрузки и с ее увеличением распространяются в глубину. Слияние зон пластического деформирования в одну большую зону под всей нагрузкой произойдет под центром нагрузки на глубине, где горизонталь  $z = \text{const}$  касается окружности. Можно предположить, что с этого момента осадка основания будет происходить без приращения нагрузки, а достигнутый уровень нагружения является предельным. Таким образом, **предельное критическое давление** это нагрузка, при которой зоны предельного равновесия сливаются в одну общую зону, отделяющую нагрузку от нижележащего массива грунта.



**Рис. 5.2. Формирование зон предельного равновесия в грунтовом массиве при действии полосовой нагрузки.**

Как уже отмечалось, предельное критическое давление является границей между фазами сдвигов и выпора. Для сопоставления приведем значения начального и предельного критических давлений при полосовой нагрузке для идеально связного грунта ( $\varphi = 0$ ):  $^{нач}p_{кр} = \pi \cdot c + \gamma \cdot h$ ;  $^{пред}p_{кр} = (2 + \pi) \cdot c + \gamma \cdot h$ . Последняя формула была получена Прандтлем на основании постулирования огибающей зон предельного равновесия в грунтовом массиве. В нормах на проектирование оснований принята форма огибающих зон предельного равновесия, предложенная Березанцевым (рис. 5.3, условно показана только левая часть симметричного графика). Решение сведено к трехчленному уравнению с протабулированными коэффициентами:

$$^{пред}p_{кр} = N_{\gamma} \cdot \gamma \cdot b + N_q \cdot q + N_c \cdot c, \quad (5.8)$$

где  $N_{\gamma}$ ,  $N_q$ ,  $N_c$  – коэффициенты, функционально зависящие от угла внутреннего трения  $\varphi$ ;  $c$  – сцепление;  $b$  – ширина фундамента;  $q = \gamma \cdot h$  – пригруз.

**Рис. 5.3. Форма огибающих зон предельного равновесия грунтового массива по Березанцеву:**

**a, b, c, d – характерные точки линии скольжения.**



Как уже отмечалось, в современной механике критические давления на грунт чаще всего определяются из решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности с использованием алгоритмов, реализуемых на

ПЭВМ. Достоинством таких решений является установление функциональных зависимостей осадок от давлений в фазах сдвигов и выпора грунта. Замкнутые аналитические решения, позволяющие получить такой результат, в нормах на проектирование оснований отсутствуют. По этой причине давления на основания ограничивают величиной расчетного сопротивления грунта, а осадки рассчитывают с использованием линейной теории.

**3. Давление грунта на подпорные стены.** Подпорной стеной называют конструкцию, воспринимающую горизонтальные давления грунтового массива, находящегося в состоянии предельного равновесия. Рассмотрим подпорную стену с вертикальной и абсолютно гладкой поверхностью, обращенной в сторону грунтового массива (рис. 5.4).

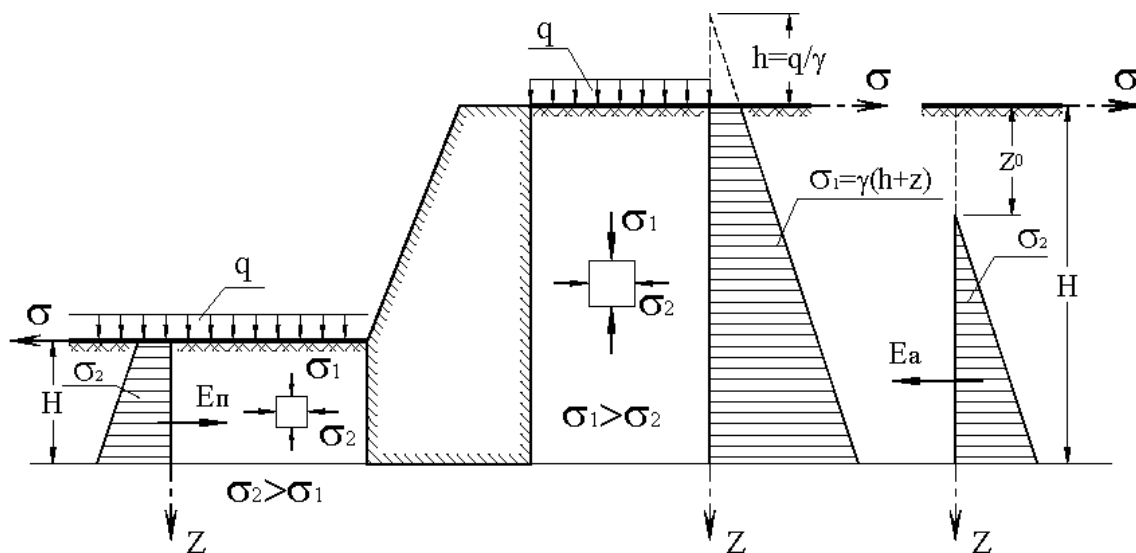


Рис. 5.4. Расчетная схема для определения величин активного и пассивного давления грунта на подпорную стену.

Эти условия позволяют рассматривать давление грунта на боковую поверхность стены как главные напряжения  $\sigma_2$ , действующие в грунтовом массиве на вертикальных площадках. На горизонтальных площадках действуют напряжения  $\sigma_1$  от собственного веса грунтового массива и от пригруза  $q$  ( $\text{кН/м}^2$ ) на его поверхности. Поверхность грунтового массива предполагается горизонтальной, а пригруз представляется весом насыпи высотой  $h = q/\gamma$ . Главные напряжения  $\sigma_1$  являются большими. Для решения задачи воспользуемся условием прочности Кулона – Мора, записанным в форме соотношения главных напряжений:

$$\frac{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi / 2) . \quad (5.9)$$

Решим уравнение (5.9) относительно давлений грунта на подпорную стену  $\sigma_2$ , для чего выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi [1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2)]; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)}{\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi)} = \\ &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)}{\operatorname{ctg} \varphi}; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - 2 \cdot c \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2).\end{aligned}\quad (5.10)$$

Предполагается, что вертикальные напряжения  $\sigma_1$  от собственного веса грунта и веса пригруза на его поверхности изменяются по глубине грунтового массива как гидростатические давления, т. е.  $\sigma_1 = \gamma \cdot (h + z)$ , где  $\gamma$  – удельный вес грунта. Тогда уравнения (5.10) примут окончательный вид:

$$\sigma_2 = \gamma \cdot (z + h) \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - 2 \cdot c \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2). \quad (5.11)$$

Напряжение  $\sigma_2$  представляет собой искомое давление грунта на подпорную стену. Следующей задачей является определение равнодействующей  $E_a$  давлений  $\sigma_2$  и плеча ее приложения  $h_a$ . Давления по формуле (5.11) представляют собой линейную знакопеременную зависимость. Равнодействующую давлений  $E_a$  следует вычислять как площадь эпюры (5.11) в диапазоне положительных давлений, так как отрицательная площадь этой эпюры характеризует удерживающие силы, обусловленные силами сцепления грунта (второе слагаемое в формуле (5.11)). Для установления диапазона положительных давлений эпюры (5.11) в пределах высоты подпорной стены определим координату  $z_0$ , соответствующую нулевому значению давления  $\sigma_2$ :

$$z_0 = \frac{2 \cdot c}{\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)} - h. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) используется для определения глубины устойчивого котлована с вертикальными стенами, расположенного выше уровня грунтовых вод. Из этой формулы следует, что устройство котлована с вертикальными стенами в сыпучем грунте теоретически невозможно. Увеличение пригруза на бровке котлована приводит к уменьшению его устойчивой глубины (второе



слагаемое в формуле (5.12)). Координата  $z_0$  по формуле (5.12) может быть как положительной, так и отрицательной. Физический смысл имеют значения  $0 \leq z_0 \leq H$ , где  $H$  – высота подпорной стены. При  $z_0 < 0$  диапазон положительных давлений распространяется в область пригруза (балласта), поэтому следует принимать  $z_0 = 0$ . При  $z_0 > H$  положительные давления в пределах высоты стены отсутствуют (грунтовый массив устойчив), поэтому следует принимать  $z_0 = H$ . С учетом сделанных замечаний в отношении алгоритма вычисления координаты  $z_0$ , сила давления на подпорную стену  $E_a$  (кН/м) может быть определена по формуле:

$$E_a = \frac{\sigma_2(z_0) + \sigma_2(H)}{2} \cdot (H - z_0). \quad (5.13)$$

При вычислении силы давления по формуле (5.13) возникают определенные трудности в определении плеча ее приложения  $h_a$ . Поэтому более предпочтительной является следующая интерпретация формулы (5.13):

$$\begin{aligned} E_a &= E_{a1} + E_{a2}; & E_{a1} &= \sigma_2(z_0) \cdot (H - z_0); \\ E_{a2} &= \frac{\sigma_2(H) - \sigma_2(z_0)}{2} \cdot (H - z_0); \\ h_{01} &= \frac{H - z_0}{2}; & h_{02} &= \frac{H - z_0}{3}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Представляют интерес частные случаи формул (5.13) и (5.14). Для идеально сыпучего грунта ( $c = 0$ ) при отсутствии пригруза ( $h = 0$ ) будем иметь:

$$E_a = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2); \quad h_a = \frac{H}{3}. \quad (5.15)$$

Для идеально связного грунта ( $\varphi = 0$ ) при отсутствии пригруза ( $h = 0$ ) будем иметь:

$$E_a = \frac{\gamma \cdot H - 2 \cdot c}{2} \cdot \left( H - \frac{2 \cdot c}{\gamma} \right); \quad h_a = \frac{H - 2 \cdot c/\gamma}{3}; \quad H > \frac{2 \cdot c}{\gamma}. \quad (5.16)$$

**Давления** по формулам (5.13) и (5.14) называются **активными**. Они реализуются, когда в состоянии предельного равновесия грунт перемещается относительно неподвижной конструкции. Таким образом, **давление грунта на удерживающую его подпорную стену является активным давлением**. Возможна другая форма предельного равновесия грунта, когда конструкция

перемещается относительно неподвижного грунта. Такая форма предельного равновесия возникает за подпорной стеной (рис. 5.4) в массиве грунта, который удерживает подпорную стену от перемещений, вызванных активным давлением. Удерживающее подпорную стену напряжение в грунтовом массиве называется **пассивным давлением**. При определении пассивного давления учитывается, что горизонтальные напряжения  $\sigma_2$  являются большими главными напряжениями. Тогда, по аналогии с выводом формул (5.10), будем иметь:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} &= \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2); \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi [1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)]; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}(90^\circ + \varphi)}; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{-\operatorname{ctg} \varphi}; \\ \sigma_2 &= \sigma_1 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + 2 \cdot c \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2).\end{aligned}\quad (5.17)$$

Принимая для вертикальных напряжений ранее установленную зависимость, получим окончательное выражение для пассивных давлений с учетом пригрузки на поверхности грунта:

$$\sigma_2 = \gamma \cdot (z + h) \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + 2 \cdot c \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2). \quad (5.18)$$

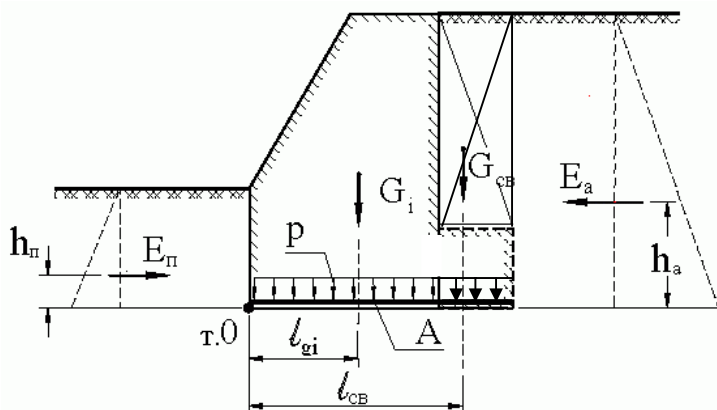
Эпюра пассивных давлений по всей высоте контакта конструкции с грунтом однозначна. Это упрощает выражение для силы  $E_n$  (кН/м) пассивного давления грунта:

$$\begin{aligned}E_n &= E_{n1} + E_{n2}; \quad E_{n1} = H \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2) \cdot [\gamma \cdot h \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2) + 2 \cdot c]; \\ E_{n2} &= \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2); \quad h_{n1} = \frac{H}{2}; \quad h_{n2} = \frac{H}{3}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

Для идеально сыпучего грунта ( $c = 0$ ) при отсутствии пригрузки ( $h = 0$ )  $E_n = E_{n2}$ . Для идеально связного грунта ( $\varphi = 0$ ) при отсутствии пригрузки ( $h = 0$ ) будем иметь:

$$E_n = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} + 2 \cdot H \cdot c. \quad (5.20)$$

**4. Устойчивость подпорных стен.** Формами потери устойчивости подпорных стен (рис. 5.5) являются: сдвиг по подошве под воздействием активного давления грунта; опрокидывание относительно крайней точки на уровне подошвы со стороны, противоположной действию активного давления грунта. Проверка устойчивости подпорной стены выполняется с использованием двух уравнений равновесия: сумма проекций всех сил на горизонтальную ось равна нулю; сумма моментов всех сил относительно точки опрокидывания равна нулю.



**Рис. 5.5. Расчетная схема для проверки устойчивости стены от сдвига и опрокидывания.**

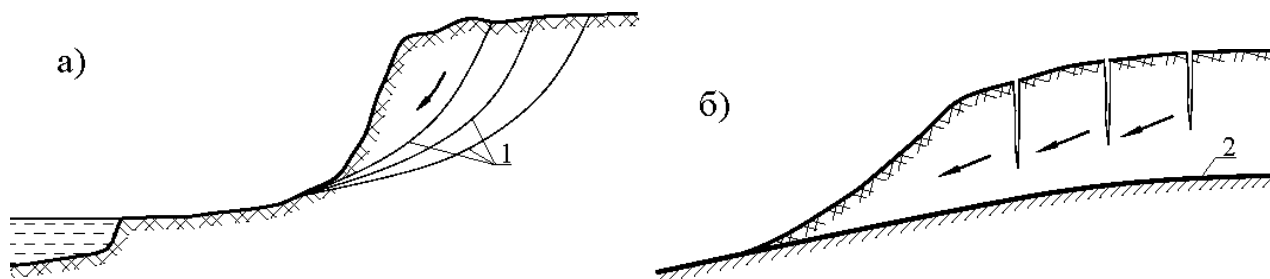
С учетом обозначений на рис. 5.5, эти проверки имеют вид:

$$\begin{aligned}
 E_{y\partial} &\geq \gamma_f \cdot E_{c\partial}; & E_{y\partial} &= E_n + A \cdot [(p - p_w) \cdot \operatorname{tg} \varphi + c]; & E_{c\partial} &= E_a; \\
 M_{y\partial} &\geq \gamma_f \cdot M_{onp}; & M_{y\partial} &= E_{n1} \cdot h_{n1} + E_{n2} \cdot h_{n2} + \sum G_i \cdot l_{gi} + \sum G_{св} \cdot l_{св}; \\
 M_{onp} &= E_{a1} \cdot h_{a1} + E_{a2} \cdot h_{a2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

где  $A$  (кН/м) – погонная площадь подошвы подпорной стены;  $p, p_w$  – соответственно среднее давление по подошве подпорной стены и поровое давление (при завершённой фильтрационной консолидации  $p_w = 0$ );  $G_i$  (кН/м),  $l_{gi}$  – соответственно погонный вес части сечения подпорной стены и расстояние от центра тяжести этой части до точки опрокидывания;  $G_{св}, l_{св}$  – то же для грунта на свесах фундамента подпорной стены;  $\gamma_f$  – коэффициент надежности по нагрузке, больший единицы.

## Лекция 6. Устойчивость грунтовых откосов.

Массив грунта при определенных условиях может потерять устойчивость и в результате этого перейти из состояния статического равновесия в состояние движения. Такое состояние грунтового массива называется **оползнем**. Принятая классификация оползней основана на схемах потери устойчивости грунтового массива. Различают следующие виды оползней: **оползни вращения; оползни скольжения; оползни разжижения** (рис 6.1).



**Рис. 6.1. Виды оползней: а – оползень вращения; б – оползень скольжения (пристенный оползень); 1 – поверхности скольжения в теле оползня; 2 – стационарная плоскость скольжения на границе оползня с подстилающим устойчивым массивом.**

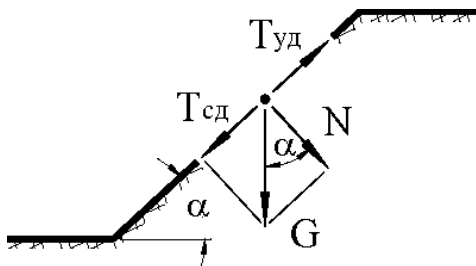
Для оползней вращения характерна форма потери устойчивости грунтового массива в виде движения по криволинейной поверхности с вращением. Оползни скольжения называют также пристенными оползнями, так как их движение при нарушении равновесия происходит по заранее известным плоскостям, являющимся плоскостями контакта грунтового массива с устойчивыми горными породами. Оползнями разжижения называют грязевые потоки разжиженного водой грунта по выработанным руслам рек и тельвегам, например, селевые потоки. Механика грунтов изучает первые два типа оползней. Нарушение равновесия массива грунта может происходить внезапно со сползанием значительных масс грунта. Основными причинами нарушения равновесия массива грунта является увеличение нагрузок, действующих на массив, и уменьшение внутреннего сопротивления грунтового массива. **Увеличение нагрузок** может происходить по следующим причинам: возведение сооружений на откосах; водонасыщение массива грунта или подвешивание капиллярной влаги при понижении уровня грунтовых вод; увеличение градиента гидравлического напора и связанных с этой величиной фильтрационных сил. Фильтрационными силами называют силы давления и трения грунтового потока по поверхности минеральных частиц грунта. Интенсивности этих сил на единицу объема грунта могут быть вычислены по формулам:

$$\Phi_x = -\gamma \frac{\partial H}{\partial x} = -\gamma i_x; \quad \Phi_y = -\gamma \frac{\partial H}{\partial y} = -\gamma i_y; \quad \Phi_z = -\gamma \frac{\partial H}{\partial z} = -\gamma i_z, \quad (6.1)$$

где  $H$  – гидравлический напор, выраженный в пьезометрических единицах, например, в метрах водяного столба.

**Уменьшение сопротивления** массива грунта может происходить в результате: разрушения естественных упоров, например, в результате подмыва основания откоса; уменьшения эффективного трения при возрастании порового давления; уменьшения сил сцепления при увлажнении и набухании грунтов. Ниже приводятся инженерные решения задач, связанных с определением устойчивости свободных откосов и склонов. Откос отличают от склона большим углом наклона свободной поверхности к горизонтали. По различным литературным источникам откосом называют склон с углом наклона свободной поверхности к горизонтали более  $30^\circ$ . Нормативная классификация грунтовых массивов, подразделяющая их на склоны и откосы отсутствует. В связи с этим приведенное выше определение откоса является условным.

**1. Устойчивость откоса из идеально сыпучего грунта.** Откос из идеально сыпучего грунта имеет свободную поверхность, наклоненную к горизонтальной плоскости под углом  $\alpha$  (рис. 6.2).



**Рис. 6.2. Предельное равновесие откоса, сложенного идеально сыпучим грунтом.**

Элементарная частица грунта на свободной поверхности испытывает силу тяжести  $G$ , которую можно разложить на нормальную  $N$  и касательную  $T$  к наклонной поверхности компоненты:

$$N = G \cdot \cos \alpha; \quad T = G \cdot \sin \alpha. \quad (6.2)$$

Элементарная частица грунта удерживается на наклонной поверхности силой трения, равной произведению нормальной компоненты силы тяжести на коэффициент трения. Обозначим коэффициент трения как тангенс угла внутреннего трения  $\varphi$ . Тогда из уравнения равновесия проекций всех сил на наклонную плоскость получим:

$$T_{уд} = T_{cd}; \quad T_{уд} = N \cdot \operatorname{tg} \varphi = G \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi; \quad T_{cd} = T = G \cdot \sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi; \quad \alpha = \varphi. \quad (6.3)$$

Полученный результат можно обобщить в виде следующего определения: **угол наклона к горизонтальной плоскости свободной поверхности откоса, сложенного идеально сыпучим грунтом, равен углу внутреннего трения этого грунта.** Этот результат можно использовать в качестве теоретической основы экспериментального метода по определению угла внутреннего трения сыпучего грунта.

## 2. Метод круглоцилиндрических поверхностей скольжения.

Применяется для расчетов устойчивости оползней вращения. Основан на гипотезе, постулирующей круглоцилиндрическую поверхность скольжения, по которой происходит поступательно-вращательное движение верхней части грунтового массива при потере им устойчивости положения. Выберем на чертеже (рис. 6.3), изображающем вертикальный разрез откоса, бесконечно протяженного перпендикулярно плоскости чертежа, центр  $O$  круглоцилиндрической поверхности скольжения.

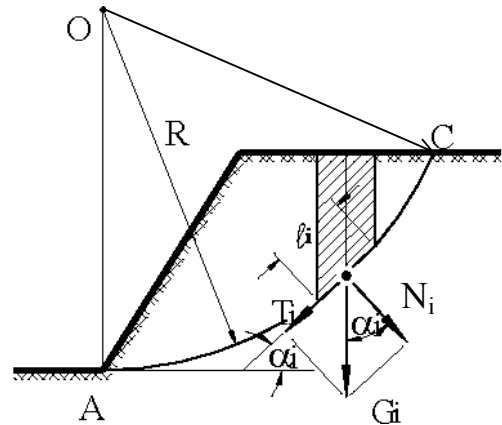


Рис. 6.3. Расчетная схема к определению устойчивости откоса методом круглоцилиндрических поверхностей скольжения.

Будем предполагать (факт, установленный экспериментально), что плоскость скольжения проходит через основание откоса в точке  $A$ . Выделим верхнюю часть откоса окружностью радиусом  $OA$  с центром в точке  $O$ , проходящей через основание откоса в точке  $A$ . Рассмотрим условие равновесия выделенной части откоса, для чего разделим ее вертикальными плоскостями, перпендикулярными чертежу, на элементарные объемы. Условие равновесия рассмотрим на примере  $i$ -го элементарного объема. Проведем центральную вертикальную ось площади этого объема и касательную к поверхности скольжения в точке ее пересечения с центральной осью. Обозначим угол наклона касательной к горизонтальной оси  $\alpha_i$ . Вес элементарного объема грунта обозначим  $G_i$  и приложим в точке пересечения центральной оси с поверхностью скольжения. Разложим силу  $G_i$  на нормальную и касательную к поверхности скольжения составляющие  $N_i$  и  $T_i$ :

$$N_i = G_i \cos \alpha_i; \quad T_i = G_i \sin \alpha_i. \quad (6.4)$$

Сдвигающей силой является касательная составляющая силы тяжести  $T_{cd,i} = T_i$ . Удерживающими силами являются сила трения и сила сцепления по поверхности скольжения:

$$T_{y\partial,i} = tg \varphi_i G_i \cos \alpha_i + l_i c_i, \quad (6.5)$$

где  $l_i$  – длина дуги поверхности скольжения в пределах  $i$ -го объема грунта;  
 $c_i$  и  $\varphi_i$  – сцепление и угол внутреннего трения грунта в пределах дуги  $l_i$ .

Условием равновесия по поверхности скольжения  $AC$ , пересекающей откос, является равенство нулю суммы моментов сдвигающих и удерживающих сил относительно центра  $O$  круглоцилиндрической поверхности скольжения:

$$R \sum_{i=1}^n G_i \cdot \sin \alpha_i - R \sum_{i=1}^n (tg \varphi_i \cdot G_i \cdot \cos \alpha_i + c_i \cdot l_i) = 0. \quad (6.6)$$

Для анализа устойчивости грунтового массива вместо уравнения (6.6) чаще всего используют выражение для коэффициента устойчивости, равное отношению момента удерживающих сил к моменту сдвигающих сил:

$$\eta = \frac{M_{y\partial}}{M_{cd}} = \frac{\sum_{i=1}^n (tg \varphi_i \cdot G_i \cos \alpha_i + c_i \cdot l_i)}{\sum_{i=1}^n G_i \cdot \sin \alpha_i} > 1. \quad (6.7)$$

В формулах (6.6) и (6.7) угол  $\alpha$  отсчитывается от горизонтали и считается положительным при повороте ее на острый угол до совмещения с касательной против хода часовой стрелки. При отрицательном угле  $\alpha$  касательная составляющая силы тяжести и соответствующий ей момент являются удерживающими, что автоматически учитывается формулами (6.6) и (6.7). Предел суммирования по  $i$   $n$  определяет количество элементарных объемов грунта, на которые разделяется верхняя часть откоса, отделенная от остального массива поверхностью скольжения. С увеличением  $n$  увеличивается точность расчетов по формулам (6.6) и (6.7). Формулы (6.6) и (6.7) являются не конечными, а промежуточными результатами. **Решение задачи состоит в отыскании минимального коэффициента устойчивости откоса  $\eta$  для всех возможных траекторий поверхностей скольжения.** Для упрощения решения поставленной задачи существуют следующие рекомендации. Предполагается, что центры возможных круглоцилиндрических поверхностей скольжения лежат на прямой (рис. 6.4), соединяющей вершину откоса  $B$  с точкой в глубине

массива, отстоящей от основания откоса (точка  $A$ ) по горизонтали на  $4,5H$  и от верха откоса (точка  $B$ ) по глубине на  $2H$ . Варьируя на указанной линии положением центров поворота  $O_j$ , строят график зависимости коэффициента устойчивости откоса  $\eta_j$  от положения центра поворота  $O_j$ . Решением задачи (рис. 6.4) является минимальный коэффициент устойчивости откоса  $\eta_{j,min}$ .

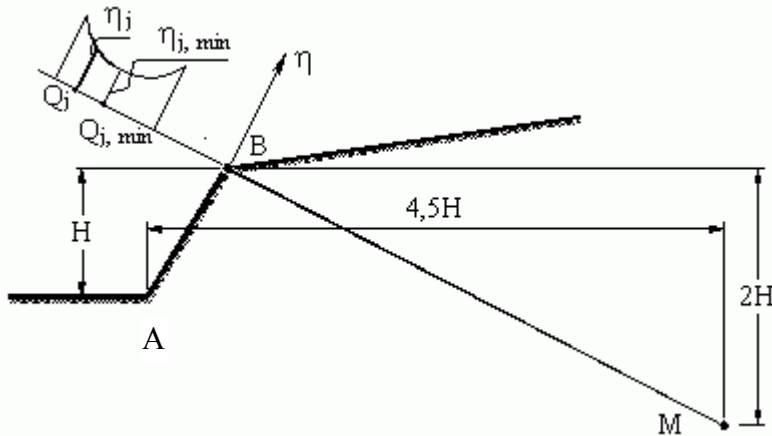


Рис. 6.4. Расчетная схема к определению минимального коэффициента устойчивости.

**3. Давление сыпучего грунта на подпорную стену произвольной конструкции.** В этой задаче, в отличие от рассмотренной в лекции №5, подпорная стена и поверхность массива грунта могут иметь наклон, а на контакте стены с грунтом может реализоваться трение с условным углом внутреннего трения  $\varphi_0$ . Задача решается построением веревочного многоугольника. Массив грунта за подпорной стеной разбивается лучами, исходящими из нижней точки подпорной стены, на элементарные треугольные призмы весом  $G_i$  (рис. 6.5). Вектор реакции давления грунта на подпорную стену  $E_a$  отклонен от нормали к поверхности подпорной стены на угол  $\varphi_0$  (рис. 6.6). Между элементарными треугольными призмами возникают давления, вектор которых  $R_i$  отклонен от нормали к боковой грани призмы на угол внутреннего трения грунта  $\varphi_i$ . Поверхность скольжения постулирована плоской, совпадающей с боковой гранью одной из призм, проходящей через основание подпорной стены. Решение задачи формулируется следующим образом: по направлению и модулю вектора  $G_i$  и направлениям векторов  $E_i$  и  $R_i$  определить модули векторов  $E_i$  и  $R_i$ . Выполняя графические построения по сформулированному алгоритму, определяем вектора давлений на подпорную стену  $E_i$ .

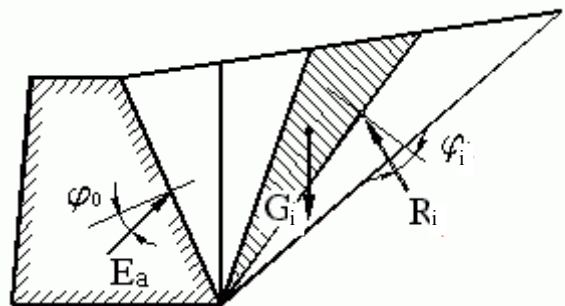
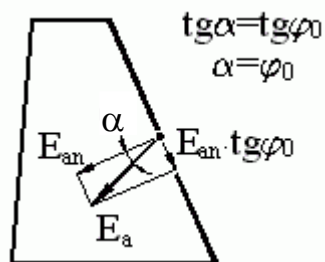


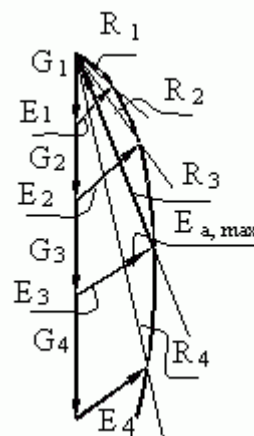
Рис. 6.5. Схема к определению давления грунта на подпорную стену произвольной конструкции.



Решением задачи (рис. 6.7) будет максимальное значение вектора  $E_{i,max}$ , а соответствующая ему плоскость скольжения будет расчетной плоскостью, по которой наступает предельное равновесие грунтового массива.

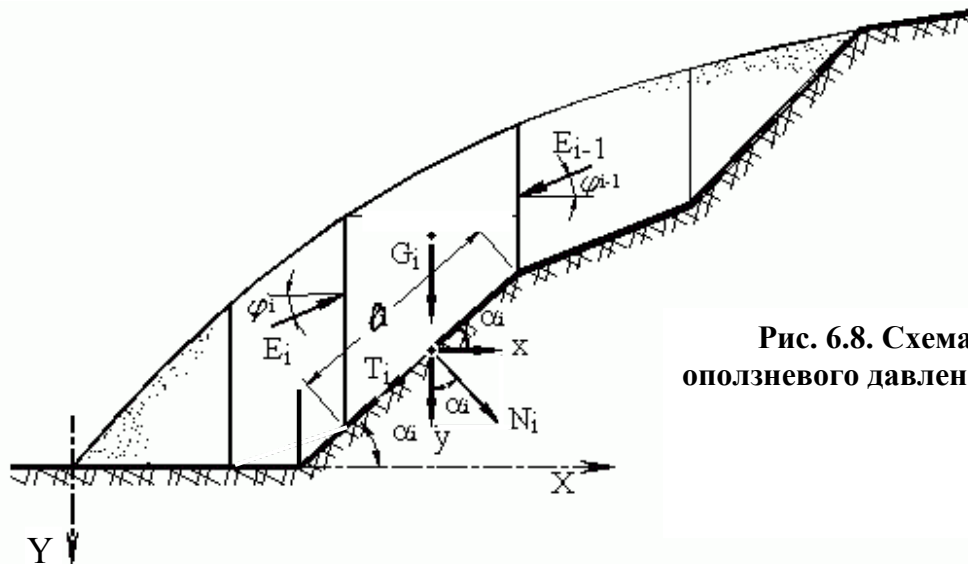


**Рис. 6.6. Схема к определению угла отклонения вектора активного давления грунта при наличии трения на контакте грунта с подпорной стеной.**



**Рис. 6.7. Графический метод определения давлений грунта на подпорную стену произвольной конструкции.**

**4. Расчет устойчивости пристенного оползня.** Как уже отмечалось, предельное равновесие пристенного оползня реализуется по заранее известным плоскостям скольжения (рис. 6.8), каковыми являются плоскости контакта грунтового массива с коренными породами.



**Рис. 6.8. Схема определения оползневого давления.**

Решение задачи сводится к определению величины оползневого давления  $E_i$ . Массив грунта разбивается вертикальными плоскостями, перпендикулярными чертежу, на элементарные призмы с приведенным весом  $G_i$ . Под приведенным весом понимается собственный вес грунта с нагрузкой на его поверхности. В пределах элементарной призмы поверхность скольжения

должна быть представлена плоскостью (без переломов и изгибов). Предполагается, что силы оползневых давлений  $E_i$  наклонены к боковым граням элементарных призм грунта под углом внутреннего трения  $\varphi_i$ . Плоскость скольжения элементарной призмы наклонена к горизонтали под углом  $\alpha_i$ . Решение задачи сводится к определению оползневого давления  $E_i$  по известному давлению  $E_{i-1}$  и приведенному весу  $G_i$ . Для этого составляется и решается уравнение предельного равновесия на площадке скольжения. Приведем силы, действующие на элементарную призму (рис. 6.8), к их проекциям на вертикальную  $Y$  и горизонтальную  $X$  оси:

$$Y = G_i + E_{i-1} \cdot \sin \varphi_{i-1} - E_i \cdot \sin \varphi_i; \quad X = E_i \cdot \cos \varphi_i - E_{i-1} \cdot \cos \varphi_{i-1}. \quad (6.8)$$

Приведем систему сил (6.8) к их проекциям на нормаль к плоскости скольжения  $N$  и касательную  $T$ , лежащую в этой плоскости:

$$\begin{aligned} N &= Y \cdot \cos \alpha_i + X \cdot \sin \alpha_i = (G_i + E_{i-1} \cdot \sin \varphi_{i-1} - E_i \cdot \sin \varphi_i) \cos \alpha_i + \\ &+ (E_i \cdot \cos \varphi_i - E_{i-1} \cdot \cos \varphi_{i-1}) \sin \alpha_i; \\ T &= Y \cdot \sin \alpha_i - X \cdot \cos \alpha_i = (G_i + E_{i-1} \sin \varphi_{i-1} - E_i \cdot \sin \varphi_i) \sin \alpha_i - \\ &- (E_i \cdot \cos \varphi_i - E_{i-1} \cdot \cos \varphi_{i-1}) \cos \alpha_i. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Условие предельного равновесия на площадке скольжения будет иметь вид:

$$\begin{aligned} T &= N \cdot \operatorname{tg} \varphi_i + l_i \cdot c_i; \\ (G_i + E_{i-1} \cdot \sin \varphi_{i-1}) \sin \alpha_i - E_i \cdot (\sin \varphi_i \sin \alpha_i + \cos \varphi_i \cos \alpha_i) + E_{i-1} \cdot \cos \varphi_{i-1} \cos \alpha_i &= \\ = \operatorname{tg} \varphi_i [(G_i + E_{i-1} \cdot \sin \varphi_{i-1}) \cos \alpha_i - E_{i-1} \cdot \cos \varphi_{i-1} \sin \alpha_i] - & \\ - E_i \cdot (\sin \varphi_i \cos \alpha_i - \cos \varphi_i \sin \alpha_i) \operatorname{tg} \varphi_i + l_i \cdot c_i; & \\ E_i = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i [(G_i + E_{i-1} \sin \varphi_{i-1}) \cos \alpha_i - E_{i-1} \cos \varphi_{i-1} \sin \alpha_i] - (G_i + E_{i-1} \sin \varphi_{i-1}) \sin \alpha_i - E_{i-1} \cos \varphi_{i-1} \cos \alpha_i + l_i c_i}{(\sin \varphi_i \cos \alpha_i - \cos \varphi_i \sin \alpha_i) \operatorname{tg} \varphi_i - \sin \varphi_i \sin \alpha_i - \cos \varphi_i \cos \alpha_i} & \end{aligned} \quad (6.10)$$

Полученное решение для  $E_i$  используется для анализа устойчивости пристенного оползня следующим образом.

Для первой призмы в верхней части оползня принимается  $E_0 = 0$ . Определяется по формуле (6.10)  $E_1$ . Указанная процедура продолжается до тех пор, пока не будет вычислено  $E_n$  – оползневое давление на свободной поверхности последней призмы нижней части оползня. Если  $E_n$  больше нуля, оползень считается неустойчивым. Если  $E_n$  меньше нуля, устойчивость оползня обеспечена.

## Лекция 7. Модели грунтового основания. Методы расчета осадок.

**1. Модели грунтового основания** представляют собой теоретические обобщения экспериментальных данных о закономерностях деформирования оснований под нагрузкой. Классифицируются по следующим признакам: по учету распределительных свойств основания; по учету необратимых деформаций; по виду зависимости между напряжениями и деформациями (рис. 7.1).

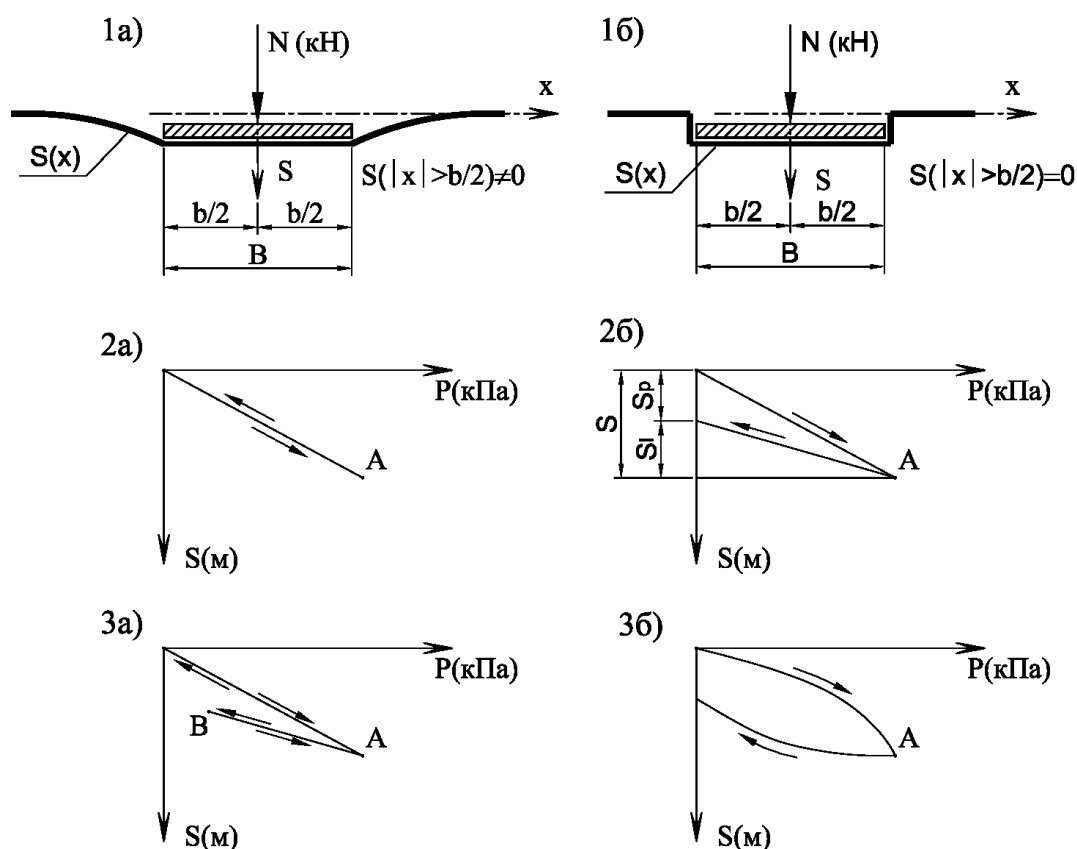


Рис. 7.1. Классификация моделей грунтового основания.

По признаку учета распределительных свойств различают модель общих деформаций (рис. 7.1.1 а) и модель местных деформаций (рис. 7.1.1 б). **Модель общих деформаций** предполагает, что осадки основания происходят не только на загруженной поверхности, но и за ее границами. Примером модели общих деформаций является модель линейно деформируемого полупространства. **Модель местных деформаций** предполагает, что осадки основания происходят только в пределах загруженной поверхности. Примерами модели местных деформаций являются модели Винклера и Фусса. По признаку учета необратимых деформаций различают **упругие** (рис. 7.1.2 а) и **неупругие** (рис. 7.1.2 б) модели. Для упругих моделей характерно совпадение графиков

нагрузки и разгрузки, построенных в координатах «осадка – давление». Примерами упругих моделей являются модель линейно деформируемого полупространства и модель Винклера. В неупругих моделях графики нагрузки и разгрузки основания расходятся. При этом после полной разгрузки основания сохраняются необратимые (пластические) осадки (деформации). Примерами неупругих моделей являются модель Фусса и модель С.Н. Клепикова. По виду зависимости между напряжениями и деформациями (или давлениями и осадками) различают **линейные** (рис. 7.1.3 а) и **нелинейные** (рис. 7.1.3 б) **модели**. Примерами линейных моделей являются модель линейно деформируемого полупространства и модель Винклера. Нелинейные модели предложены С.Н. Клепиковым.

В соответствии с приведенной выше классификацией модель линейно деформируемого полупространства является **линейной упругой моделью общих деформаций**. Эта модель является основной в механике грунтов и именно на ее основе разработаны методы расчета осадок, содержащиеся в нормах на проектирование оснований. Осадка основания вычисляется интегрированием по загруженной поверхности формулы Буссинеска, устанавливающей зависимость вертикальных перемещений упругого полупространства от действующей на этой поверхности сосредоточенной силы  $P$ :

$$w(x, y, z) = \frac{P \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot R} \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot (1 - \nu)} \cdot \frac{z^2}{R^2} \right); \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (7.1)$$

где  $\nu, E$  – коэффициент Пуассона и модуль деформации грунта;  
 $x, y, z$  – координаты точки.

При подстановке в формулу (7.1)  $z = 0$  получим уже известное выражение для осадки поверхности упругого полупространства от действия сосредоточенной силы (множитель перед скобкой). Поскольку при  $R = 0$  значение осадки становится неопределенным, конечные значения осадок вычисляют для нагрузок, распределенных по площади (рис. 7.2). Подставляя в формулу (7.1) вместо силы  $P$  элементарную силу  $p d\xi d\eta$  и производя интегрирование по загруженной площади размерами  $2 \cdot a \times 2 \cdot b$ , получим с учетом того, что  $z = 0$  и  $R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$ :

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \frac{p(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \\
&= \frac{p(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ (x+a) \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} + (y+b)}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} + (y-b)} - \right. \\
&\quad - (x-a) \ln \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} + (y+b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + (y-b)} + \\
&\quad + (y+b) \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} + (x+a)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2} + (x-a)} - \\
&\quad \left. - (y-b) \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} + (x+a)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + (x-a)} \right],
\end{aligned} \tag{7.2}$$

где  $p = P / (4 \cdot a \cdot b)$ .

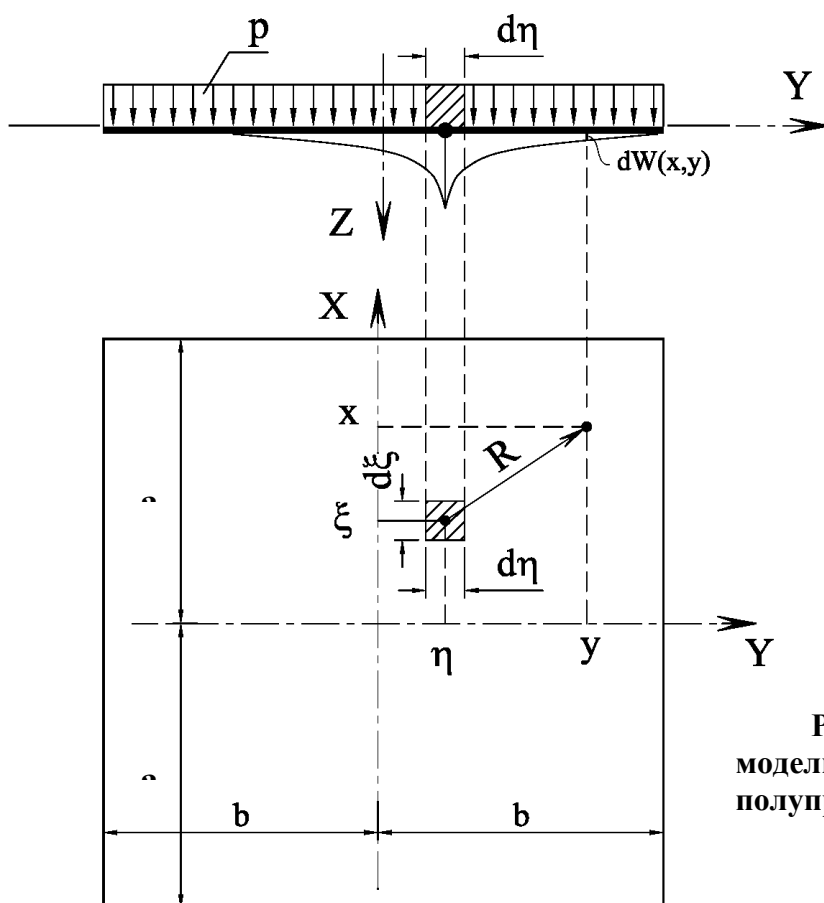


Рис. 7.2. Осадки основания по модели линейно деформируемого полупространства.

Практический интерес представляет средняя осадка загруженной поверхности, так как она совпадает с осадкой от той же нагрузки жесткого штампа. Известно решение Шлейхера для определения осадки круглого жесткого штампа, загруженного равномерно распределенной нагрузкой, и аналогичное решение Баркана для прямоугольного штампа:

$$S = \frac{\omega \cdot p \cdot d \cdot (1 - \nu^2)}{E}; \quad S = \frac{p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{\omega_z \cdot E}, \quad (7.3)$$

где  $\omega, \omega_z$  – коэффициенты формы подошвы штампа, являющиеся функциями геометрических размеров штампа в плане (приводятся в таблицах);  $d, A$  – диаметр и площадь подошвы штампа;  $p$  – среднее давление по подошве штампа.

Известно решение Жемочкина для вычисления осадок упругого полупространства от действия вертикальной силы  $P$ , распределенной по площади  $c \times b$  ( $b$  – ширина), в функции от координаты  $x$ , кратной длине загруженной площади  $c$  (рис. 7.3):

$$w(x) = \frac{p \cdot b (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E} \cdot f\left(\frac{x}{c}, \frac{b}{c}\right); \quad p = \frac{P}{b \cdot c}. \quad (7.4)$$

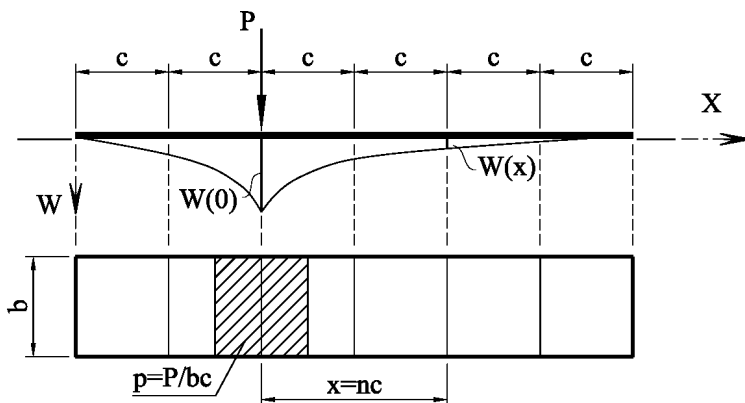


Рис. 7.3. Расчет осадок по методу Б.Н. Жемочкина.

Значение функции  $f(x/c, b/c)$  приведено в таблице 7.1. Формулы (7.2) и (7.4) используются при расчете балок и плит на упругом полупространстве, например, для определения осадок основания в уравнениях неразрывности перемещений, в том числе от единичных значений неизвестных сил. В последнем случае  $p = 1/(4 \cdot a \cdot b)$  в формуле (7.2) или  $p = 1/(b \cdot c)$  в формуле (7.4).

**Модель Винклера** является по вышеприведенной классификации упругой линейной моделью местных деформаций. Характеризуется коэффициентом постели  $C = p/s$ , где  $p$  – давление на основание;  $s$  – осадка основания. Используется для расчета балок на упругом основании. Значения коэффициента постели приводятся в справочниках в зависимости от вида грунта и его состояния.

Таблица 7.1.

$x/c$	$f(x/c, b/c)$ при значениях $b/c$					
	2/3	1	2	3	4	5
0	4,265	3,525	2,406	1,867	1,542	1,322
1	1,069	1,038	0,929	0,829	0,746	0,678
2	0,508	0,505	0,490	0,469	0,446	0,424
3	0,336	0,335	0,330	0,323	0,315	0,305
4	0,251	0,251	0,249	0,246	0,242	0,237
5	0,200	0,200	0,199	0,197	0,196	0,193
6	0,167	0,167	0,166	0,165	0,164	0,163
7	0,143	0,143	0,143	0,142	0,141	0,140
8	0,125	0,125	0,125	0,124	0,124	0,123
9	0,111	0,111	0,111	0,111	0,111	0,110
10	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100	0,099
20	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050

*P.S.* Обратите внимание на то, что при  $x \neq 0$  данные таблицы 1 примерно равны  $c/x$ .

**Модель Фусса** является по принятой классификации неупругой линейной моделью местных деформаций. Как и модель Винклера при нагрузке характеризуется коэффициентом постели. Отличие от модели Винклера заключается в том, что при разгрузке достигнутая на рассматриваемом уровне нагружения осадка является необратимой. Это соответствует бесконечному значению коэффициента постели при разгрузке. Модель используется для расчета конструкций на линейно деформируемом неупругом основании.

**Модель коэффициента жесткости.** Основывается на зависимости между давлением и осадкой, принятой в модели Винклера. Однако при этом с помощью коэффициента постели учитываются (полностью или частично) распределительные свойства основания, неупругие и нелинейные особенности его деформирования и т.п. Коэффициент постели в этом случае называется **коэффициентом жесткости**. Частичный учет распределительных свойств грунтового основания достигается применением модели коэффициента жесткости, основанной на решениях теории упругости (7.3). При этом используются не только зависимости средней осадки от среднего давления на загруженной поверхности (7.3), но также аналогичные зависимости среднего углового перемещения от распределенной моментной нагрузки и среднего горизонтального перемещения от распределенной касательной нагрузки (рис. 7.4).

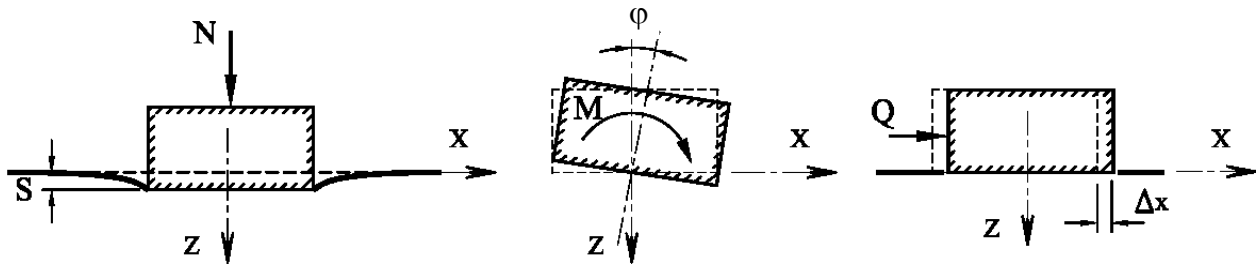


Рис. 7.4. Перемещения жесткого фундамента по модели коэффициента жесткости: а – при равномерном сжатии; б – при неравномерном сжатии; в – при равномерном сдвиге.

Соответствующие коэффициенты жесткости вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 C_z &= \frac{N}{A \cdot s} = \frac{p}{s} = \frac{\omega_z \cdot E}{\sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}; \\
 C_\varphi &= \frac{M}{I \cdot \varphi} = \frac{\omega_\varphi \cdot E}{\sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}; \\
 C_x &= \frac{Q}{A \cdot \Delta_x} = \frac{\tau}{\Delta_x} = \frac{\omega_x \cdot E}{\sqrt{A} \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - \nu \omega_x)},
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

где  $N, M, Q$  – соответственно продольная сила, изгибающий момент и поперечная (горизонтальная) сила, действующие на жесткий штамп с площадью подошвы, равной загруженной площади основания;  
 $A, I$  – площадь и момент инерции площади подошвы штампа;  
 $s, \varphi, \Delta_x$  – соответственно осадка, угол поворота и горизонтальное перемещение жесткого штампа (или соответствующие средние перемещения основания);

$\omega_z, \omega_\varphi, \omega_x$  – коэффициенты формы подошвы жесткого штампа (или загруженной площади);

$E$  – модуль деформации или модуль упругости грунта;

$C_z, C_\varphi, C_x$  – соответственно коэффициенты жесткости при **равномерном сжатии**, при **неравномерном сжатии** и при **равномерном сдвиге**.

Если определяются коэффициенты жесткости основания при действии статических нагрузок, в формулах (7.5) используется модуль деформации грунта. При решении динамических задач в формулы (7.5) подставляется значение модуля упругости грунта, определяемое по графику разгрузки основания. Формулы (7.5) впервые были получены Барканом для решения динамических задач механики грунтов.

**Модель обобщенного коэффициента жесткости основания С.Н. Клепикова** (этот материал рекомендуется изучать после прочтения п.п. 2, 3 и 4 настоящей лекции) предполагает наличие у грунта распределительных



свойств при упругом деформировании и отсутствие таких свойств при пластическом деформировании. Суммарная осадка основания представляется суммой упругой и пластической осадки:  $S = S_e + S_p$ . Упругая осадка вычисляется с учетом распределительных свойств грунта, пластическая осадка соответствует модели местных деформаций. Указанные осадки вычисляются методом послойного суммирования (см. п. 3) в соответствии с нормами на проектирование оснований. При этом пластическая осадка вычисляется по модулю пластической деформации как осадка в центре загруженной поверхности, а упругая осадка вычисляется по модулю упругой деформации методом угловых точек (см. п. 4).

В случае штамповых испытаний модули деформаций  $E_{pl}$  и  $E_{el}$  следует определять по графику зависимости осадки штампа от нагрузки на него по формулам:

$$E_{pl} = \frac{\omega \cdot p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{S_{pl}}; \quad (7.6)$$

$$E_{el} = \frac{\omega \cdot p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{S_{el}}, \quad (7.7)$$

где  $\omega$  – коэффициент формы подошвы штампа, равный 0,88 для квадрата и 0,89 для круга;  $A$  – площадь подошвы штампа;  $\nu$  – коэффициент Пуассона грунта, принимаемый для песков и супесей 0,3, суглинков 0,35, глин 0,42;  $S_{pl}$ ,  $S_{el}$  – соответственно остаточная (пластическая) и упругая (восстанавливающая) осадка штампа;  $p$  – среднее давление по подошве штампа.

В случае компрессионных испытаний модуль остаточных деформаций  $E_{pl}$  определяется по формуле:

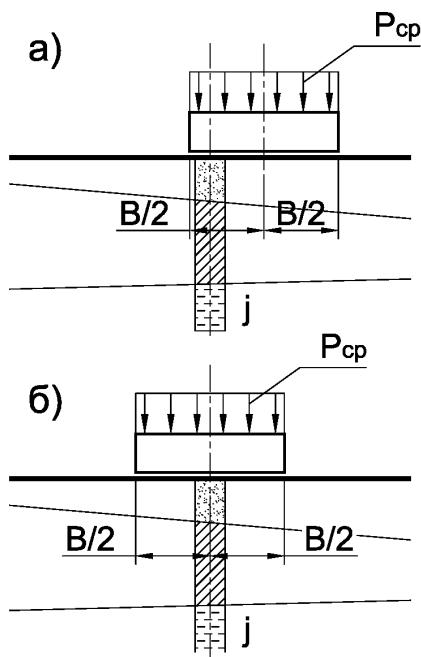
$$E_{pl} = \frac{E \cdot E_{el}}{E_{el} - E}, \quad (7.8)$$

где  $E$  – модуль полной деформации, определяемый с учетом перехода от компрессионного к штамповому модулю полных деформаций;  
 $E_{el}$  – модуль упругой деформации, определяемый по кривой разгрузки компрессионной диаграммы сжатия на рассматриваемом диапазоне изменения давлений.

Распределительные свойства грунтового основания допускается не учитывать, если для грунтов, слагающих сжимаемую толщу, выполняется условие:

$$E_{el} / E_{pl} \geq 5. \quad (7.9)$$

В каждой расчетной точке подошвы фундамента вычисляют остаточные (пластические)  $S_{pl}$  и упругие  $S_{el}$  осадки от среднего давления  $p$  по подошве фундамента.



При определении остаточных осадок основания  $S_{pl}$  по всем расчетным вертикалям (вертикалям, проходящим через расчетные точки подошвы фундамента) следует принимать такое же распределение дополнительных напряжений по глубине, как для вертикали, проходящей через центр подошвы фундамента (рис. 7.5 б). Иными словами, при вычислении данной осадки фундамент условно перемещается плоскопараллельно в плане до совмещения его вертикальной центральной оси с расчетной вертикалью. При расчете осадок методом послойного суммирования остаточная

(пластическая) осадка вычисляется по формуле:

$$S_{pl} = \beta \cdot \sum_i^n \frac{\sigma_{zp,i} \cdot h_i}{E_{pl,i}}, \quad (7.10)$$

где  $\beta$  – безразмерный коэффициент, равный 0,8;  $\sigma_{zp,i}$  – среднее значение дополнительного вертикального нормального напряжения в  $i$ -ом слое грунта по вертикали, проходящей через центр подошвы фундамента;  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя грунта;  $E_{pl,i}$  – модуль остаточных деформаций  $i$ -го слоя грунта;  $n$  – число слоев, на которое разбита сжимаемая толща основания.

Упругие осадки основания  $S_{el}$  по расчетным вертикалям следует определять с учетом неравномерного распределения вертикальных нормальных напряжений по горизонтальным сечениям сжимаемой толщи основания (рис. 7.5 а). Значения этих напряжений на глубине по вертикали, проходящей через расчетную точку подошвы фундамента, следует определять методом

угловых точек. Упругую осадку основания  $S_{el}$  по расчетной вертикали следует определять по формуле:

$$S_{el} = \beta \cdot \sum_i^n \frac{\sigma'_{zp,i} \cdot h_i}{E_{el,i}}, \quad (7.11)$$

где  $\sigma'_{zp,i}$  – среднее значение дополнительного вертикального нормального напряжения в  $i$ -том слое грунта по рассматриваемой вертикали, определяемое как сумма напряжений в общей угловой точке для четырех прямоугольников, на которые разделяется подошва фундамента;  $E_{pl,i}$  – модуль упругих деформаций  $i$ -го слоя грунта.

В каждой  $j$ -ой расчетной точке (рис. 7.5) определяется полная осадка основания по формуле:

$$S_j = S_{pl,j} + S_{el,j}. \quad (7.12)$$

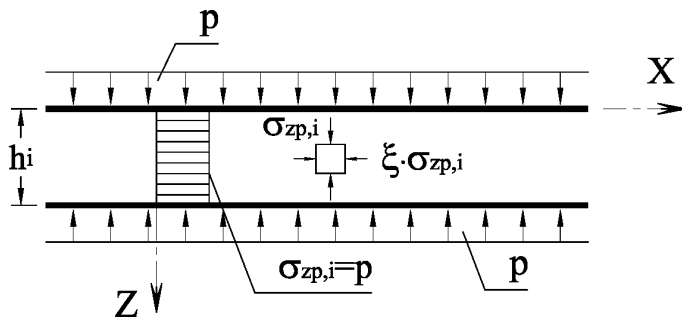
Коэффициент жесткости основания  $C_{z,j}$  по рассматриваемой  $j$ -ой вертикали определяется по формуле:

$$C_{z,j} = p / S_j. \quad (7.13)$$

Модель основания, описываемая формулами (7.10) – (7.13), может быть классифицирована как **линейно-неупругая модель общих деформаций**.

Многочисленными экспериментальными исследованиями установлено наличие у большинства грунтов ярко выраженных распределительных свойств. Например, эти свойства проявляются в форме влияния на осадки построенных сооружений нагрузок от вновь строящихся сооружений. В этой связи модель Винклера, не учитывающая распределительные свойства грунта, подвергается постоянной критике. Вместе с тем результаты расчета балок на упругом основании с использованием модели Винклера во многих случаях дают результаты, удовлетворительно согласующиеся с практикой. Установлено также, что модель линейно деформируемого полупространства существенно переоценивает распределительные свойства грунта. В действительности осадки на незагруженной поверхности затухают значительно быстрее, чем это следует из теории. По этой причине в практике проектирования и расчета оснований широкое применение нашли **модели коэффициента жесткости основания**, позволяющие при правильно выбранных параметрах более полно и точно отражать реальные свойства грунтовых оснований при их нагружении и разгрузке.

**2. Одномерная задача компрессионного уплотнения.** Решение этой задачи лежит в основе метода послойного суммирования для расчета осадок основания, сложенного разнородными грунтами. Определим осадку тонкого бесконечно протяженного слоя (рис. 7.6), напряженным состоянием которого при действии вертикальной распределенной по всей поверхности слоя нагрузки является осесимметричное компрессионное сжатие.



**Рис. 7.6. Расчетная схема одномерного компрессионного**

Осадку слоя определим интегрированием по его толщине  $h_i$  функции вертикальной деформации  $\varepsilon_{z,i}$  от действия вертикальных напряжений  $\sigma_{z,i}$ . В связи с малой толщиной слоя будем полагать, что вертикальные напряжения по его высоте распределяются равномерно. Используя закон уплотнения Терцаги, будем иметь:

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{m}{1 + e_0} \cdot \sigma_{z,i} = m_v \cdot \sigma_{z,i};$$

$$s_i = \int_0^{h_i} \varepsilon_{z,i} \cdot dh = m_v \cdot \sigma_{z,i} \cdot h_i = \left(1 - \frac{2 \cdot v_i^2}{1 - v_i}\right) \frac{\sigma_{z,i} \cdot h_i}{E_i} = \beta_i \cdot \frac{\sigma_{z,i} \cdot h_i}{E_i}, \quad (7.14)$$

где  $e_0$  – начальный коэффициент пористости;  $m$ ,  $m_v$  – коэффициенты сжимаемости и относительной сжимаемости;  $v_i$ ,  $E_i$  – коэффициент Пуассона и модуль деформации  $i^{\text{го}}$  слоя грунта.

**3. Метод послойного суммирования.** Существенным недостатком формул (7.2) и (7.4) является предположение об однородности грунтового массива по глубине. В большинстве практических случаев основание сложено по глубине разнородными грунтами, представленными в материалах инженерно-геологических изысканий инженерно-геологическими элементами (ИГЭ). Метод послойного суммирования позволяет учитывать разнородность грунтового массива по глубине. В основе метода лежит суммирование осадок элементарных слоев от действия дополнительных напряжений с использованием формулы (7.14). При этом распределение дополнительных

напряжений в грунтовом массиве принимается в соответствии с моделью линейно деформируемого полупространства (см. лекции 3, 4). **Дополнительными напряжениями** называют напряжения в грунтовом массиве от действия внешней нагрузки. Расчетная схема определения осадок основания по методу послойного суммирования представлена на рис. 7.7.

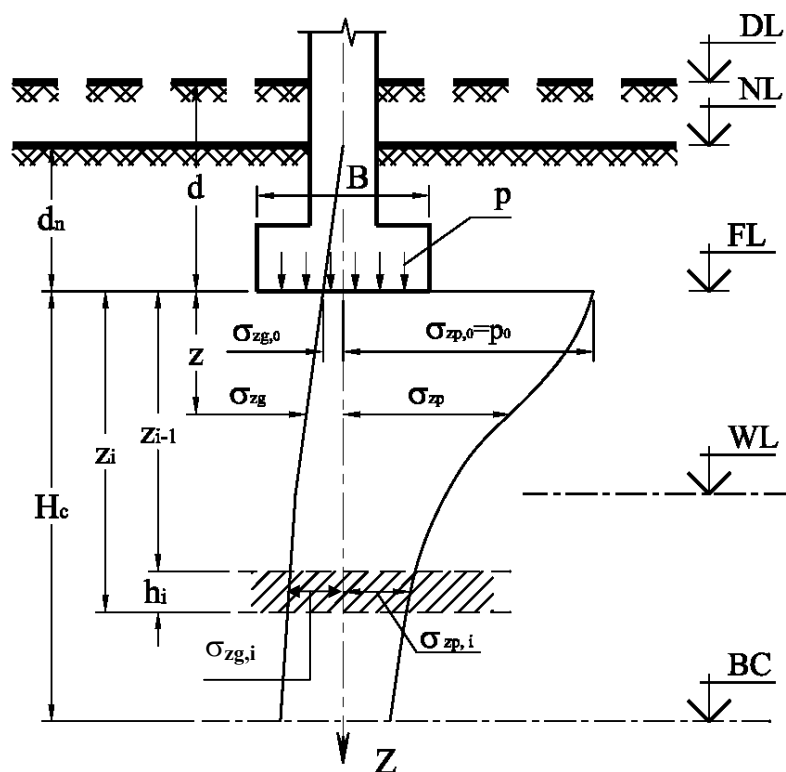


Рис. 7.7. Расчет осадки методом послойного суммирования.

**Основными допущениями метода послойного суммирования** являются следующие предпосылки: 1) напряжения в грунтовом массиве не превышают расчетного сопротивления грунта, что позволяет использовать для расчета осадок закон уплотнения Терцаги; 2) поперечные деформации грунта равны нулю, что позволяет использовать для вычисления модуля деформации грунта решения, полученные для осесимметричного компрессионного сжатия; 3) распределение дополнительных вертикальных напряжений по глубине грунтового массива принимается как для центрального сечения равномерно загруженной поверхности линейно деформируемого полупространства; 4) сжимаемая зона грунтового массива ограничена глубиной, на которой дополнительные давления не превышают 10–20 % бытовых давлений. Перечисленные выше допущения проверены многочисленными экспериментами и натурными наблюдениями за осадками построенных зданий и сооружений.

Расчетная формула метода послойного суммирования имеет вид:

$$S = \beta \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{zp,i}}{E_i} h_i; \quad \sigma_{zp,i} \geq 0,2(0,1)\sigma_{zg,i}; \quad \sigma_{zp,i} = \alpha_i p_0; \quad p_0 = p - \sigma_{zg,0}, \quad (7.15)$$

где  $p$  – давление на уровне подошвы фундамента;  $\sigma_{zg,0}$  – бытовое давление на уровне подошвы фундамента;  $\sigma_{zp,i}$ ,  $\sigma_{zg,i}$  – соответственно дополнительное и бытовое давление в центре  $i$ -го слоя грунта;  $\alpha_i$  – коэффициент распределения дополнительных давлений в центральном сечении фундамента (функция соотношений размеров фундамента в плане и относительной глубины  $i$ -го слоя грунта);  $\beta$  – коэффициент вида напряженного состояния, принимаемый равным 0,8;  $E_i$ ,  $h_i$  – модуль деформации и толщина  $i$ -го слоя грунта; 0,2 (0,1) – коэффициенты ограничения сжимаемой толщи массива грунта;  $n$  – количество расчетных слоев грунта в сжимаемой толще.

Если в основании сжимаемой толщи залегает грунт с модулем деформации менее 5 МПа, в формуле (7.15) принимается коэффициент ограничения сжимаемой толщи 0,1, в противном случае 0,2. Бытовое давление вычисляется от природного рельефа при планировке подсыпкой (рис. 7.7) или от планировочной отметки при планировке срезкой грунта. При вычислении бытовых давлений учитывается взвешивающее действие воды и гидравлический напор на уровне водопора. Толщина элементарного слоя грунта принимается не более 0,4 ширины фундамента. Границами элементарных слоев обязательно должны быть границы геологических слоев, уровень грунтовых вод и уровень водоупорного слоя.

**4. Метод угловых точек.** Является разновидностью метода послойного суммирования для вычисления осадок в произвольной точке поверхности грунтового массива, в том числе за границами загруженной поверхности.

Вычисления выполняются по формуле (7.15) при подстановке в нее вместо напряжений по центральной оси фундамента  $\sigma_{zp,i}$  напряжений по вертикали, проходящей через рассматриваемую точку поверхности грунтового массива  $\sigma_{zpc,i}$ . Указанные напряжения от действующих на поверхности грунтового массива нагрузок вычисляются методом угловых точек (см. лекцию 4).

**5. Метод линейно деформируемого слоя.** Используется в тех случаях, когда метод послойного суммирования дает завышенные значения осадок. К этим случаям относятся следующие: 1) в толще грунтового массива залегает практически несжимаемый грунт с модулем деформации, равным или более 100 МПа; 2) ширина фундаментов равна или превышает 10 м и под подошвой

фундаментов залегает грунт с модулем деформации, равным или более 10 МПа. Более строго область применимости метода линейно деформируемого слоя регламентирована в нормах на проектирование оснований и фундаментов. По структуре расчетных формул этот метод практически не отличается от метода послойного суммирования. Основным отличием является то, что в методе линейно деформируемого слоя глубина сжимаемой толщи ограничена толщиной этого слоя  $H$ , например, глубиной залегания практически несжимаемого слоя грунта. Осадка основания вычисляется по формуле (рис. 7.8):

$$S = \frac{p \cdot b \cdot k_c}{k_m} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{k_i - k_{i-1}}{E_i}, \quad (7.16)$$

где  $p$  – среднее давление под подошвой фундамента;  $b$  – ширина подошвы фундамента;  $k_c$  – коэффициент, зависящий от относительной мощности слоя;  $k_m$  – коэффициент, зависящий от модуля деформации грунта;  $k_i, k_{i-1}$  – коэффициенты распределения давлений в линейно деформируемом слое (табулированы в нормах на проектирование оснований);  $E_i$  – модуль деформации грунта.

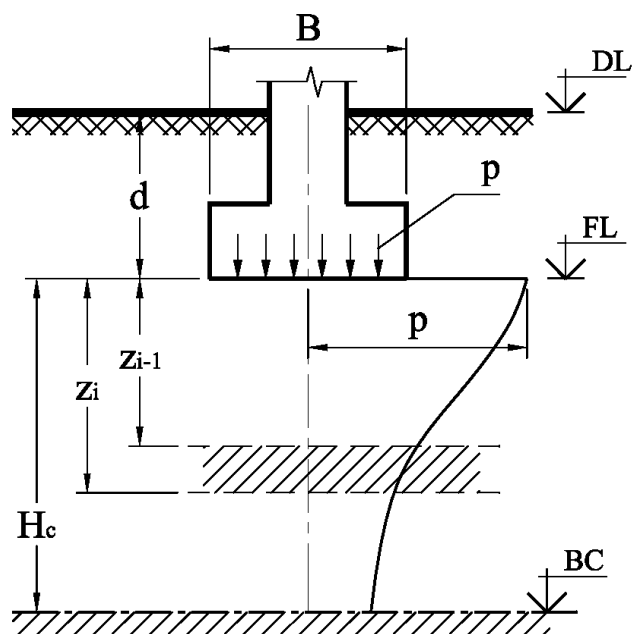
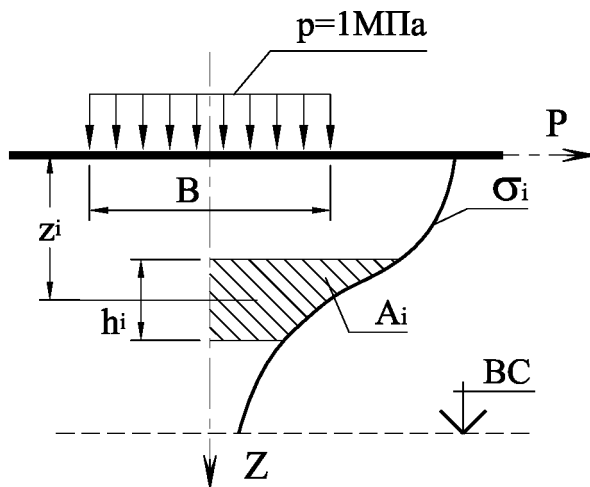


Рис. 7.8. Расчет осадок методом линейно деформируемого слоя

**6. Определение крена фундамента.** Крен фундамента (угловое перемещение), обусловленный внецентренным приложением вертикальной нагрузки, определяется по формуле:

$$i = \frac{1 - \bar{\nu}^2}{E \cdot k_m} \cdot k_e \frac{N \cdot e}{(a/2)^3}; \quad \bar{E} = \frac{\sum A_i}{\sum A_i / E_i}; \quad \bar{\nu} = \frac{1}{H} \cdot \sum \nu_i \cdot h_i, \quad (7.17)$$

где  $k_m$  – то же, что в формуле (7.16);  $k_e$  – коэффициент, зависящий от относительной толщины сжимаемого слоя  $2H_c/b$  и отношения размеров фундамента в плане  $a/b$ ;  $N, e$  – вертикальная сила, действующая на фундамент, и эксцентриситет ее приложения;  $a$  – размер стороны фундамента в направлении поворота;  $\nu_i, E_i, h_i$  – коэффициент Пуассона, модуль деформации и толщина  $i$ -го слоя грунта;  $H_c$  – толщина сжимаемого слоя;  $A_i$  – площадь эпюры вертикальных давлений от среднего давления под подошвой фундамента 1 МПа в пределах  $i$ -го слоя грунта (рис. 7.9).



**Рис. 7.9. Схема к осреднению модуля деформации грунта по глубине грунтового массива.**

Следует обратить внимание на то, что разнородность грунтов основания по глубине в формуле (7.17) учитывается путем осреднения по глубине модуля деформации и коэффициента поперечной деформации грунта.



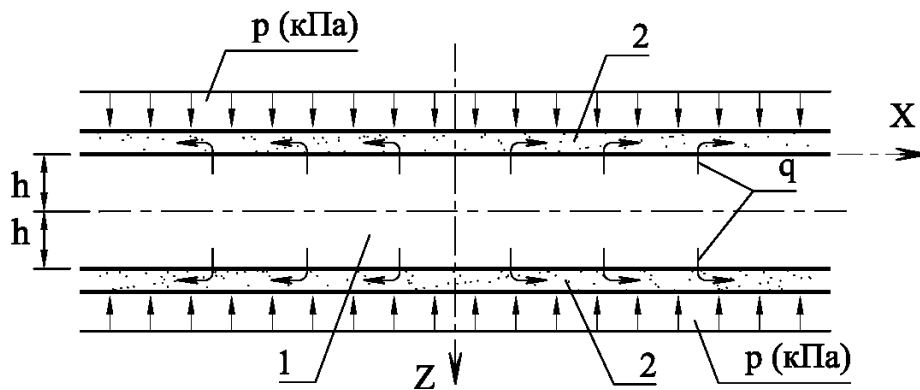
## **Лекция 8. Нестационарные модели грунтового основания.**

### **Фильтрационная консолидация и ползучесть грунта.**

#### **Нелинейные модели грунтового основания.**

Нестационарными моделями грунта называют такие модели, для которых зависимости между напряжениями и деформациями являются функциями времени. Различают два вида таких моделей: фильтрационные модели и реологические модели. С помощью **фильтрационных моделей** исследуются процессы **фильтрационной консолидации**, связанные с перераспределением давлений между скелетом грунта и поровой водой при ее отжатии из пор под действием нагрузки. Фильтрационную консолидацию грунта называют также **первичной консолидацией**. Первичная консолидация протекает в водонасыщенных грунтах при степени их влажности больше 0,8. При меньшей влажности процессами фильтрационной консолидации пренебрегают. **Реологические процессы** протекают в скелете грунта при степени его влажности меньше 0,8 и напряжениях, больших структурной прочности. Реологические процессы в грунте называют также его **вторичной консолидацией**. Как в первом, так и во втором случае основной задачей нестационарных моделей является прогноз деформаций грунтов основания на расчетный момент эксплуатации сооружения. В лекции 7 излагалась теория расчета стабилизированных (конечных) осадок основания. В некоторых практических случаях возникает необходимость в инженерном прогнозе осадок основания на расчетный момент времени. К таким случаям можно отнести основания гидротехнических сооружений, основания фундаментов, испытывающих большие горизонтальные нагрузки, сооружения, возводимые на слабых водонасыщенных грунтах и т.п.

**1. Одномерная задача фильтрационной консолидации.** Лежит в основе фильтрационных моделей грунта и формулируется следующим образом: Бесконечно протяженный тонкий слой грунта высотой  $2 \cdot h$  (рис. 8.1) ограничен сверху и снизу дренажными слоями (слоями, абсолютно проницаемыми по отношению к движению воды). На границе дренажных слоев приложено уплотняющее давление  $p$  (кПа) или, что то же самое, гидравлический напор  $H = p / \gamma_w$  (м), т.е. избыточное давление в пьезометрических единицах измерения. По толщине слоя грунта избыточное давление распределяется равномерно. Грунт находится в состоянии полного водонасыщения и не обладает структурной прочностью.

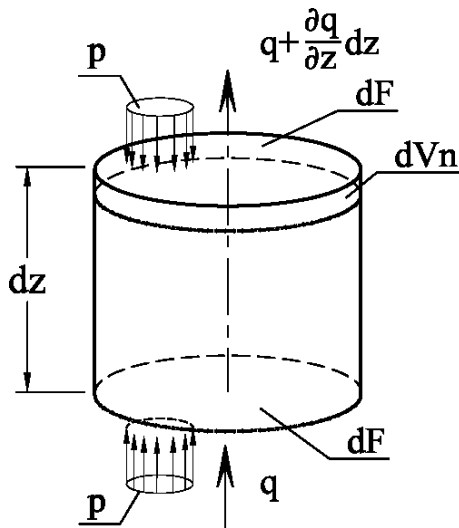


**Рис. 8.1. Расчетная схема слоя грунта в одномерной задаче фильтрационной консолидации: 1 – бесконечно протяженный тонкий слой водонасыщенного грунта; 2 – дренажные слои;  $q$  – направление фильтрационного потока.**

Изменение пористости грунта в процессе уплотнения происходит линейно в соответствии с законом уплотнения Терцаги. Движение поровой воды подчиняется закону Дарси. В любой момент времени  $p = p_z + p_w$ , где  $p_z$  – давление в скелете грунта (эффективное давление);  $p_w$  – давление в поровой воде (нейтральное давление). Требуется определить зависимость распределения эффективных давлений по глубине слоя грунта в функции от времени, а также установить зависимость во времени осадки слоя грунта, возрастающей от нуля до конечного значения по мере отжатия поровой воды и передачи избыточного давления на скелет грунта. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) избыточное давление полностью воспринимается поровой водой, а давление в скелете грунта равно нулю. Исключение составляют бесконечно малые слои грунта, непосредственно контактирующего с дренажным слоем, давления в которых всегда равны полному избыточному давлению  $p$ , так как в дренажном слое давление в воде всегда равно нулю. При  $t \rightarrow \infty$  давление в поровой воде стремится к нулю, а избыточное давление  $p$  полностью передается на скелет грунта.

**Уравнение неразрывности движения поровой воды.** Выделим в слое грунта цилиндрический объем (рис. 8.2) высотой  $dz$ , вертикальная ось которого  $z$  совпадает с направлением фильтрации поровой воды (по кратчайшему расстоянию к дренажному слою). Основания элементарного цилиндра площадью  $dF$  являются проницаемыми по отношению к движению поровой воды. Изменение объема воды в цилиндре при заданной скорости ее фильтрации  $q$  через нижнее проницаемое основания определится выражением:

$$dV_w = q \cdot dF \cdot dt + \frac{\partial q}{\partial z} \cdot dz \cdot dF \cdot dt - q \cdot dF \cdot dt = \frac{\partial q}{\partial z} \cdot dz \cdot dF \cdot dt. \quad (8.1)$$



**Рис. 8.2. Параметры фильтрационного потока в элементарном объеме грунта:**  
 $q$  – скорость фильтрационного потока;  
 $dVn$  – изменение объема грунта за счет изменения его пористости;  
 $p$  – давление, передаваемое на элементарный объем грунта внешней нагрузкой;  
 $dF$  – площади пронизываемых оснований элементарного цилиндрического объема грунта;  
 $dz$  – высота элементарного цилиндрического объема грунта.

Изменение объема пор грунта в элементарном цилиндре в результате его уплотнения избыточным давлением от начальной пористости  $n$  за время  $dt$  определится выражением:

$$dV_n = n \cdot dF \cdot dz - n \cdot dF \cdot dz - \frac{\partial n}{\partial t} \cdot dt \cdot dF \cdot dz = -\frac{\partial n}{\partial t} \cdot dt \cdot dF \cdot dz. \quad (8.2)$$

Уравнение неразрывности движения поровой воды вытекает из равенства изменения объема воды и объема пор в элементарном объеме грунта:

$$dV_w = dV_n; \quad \frac{\partial q}{\partial z} \cdot dz \cdot dF \cdot dt = -\frac{\partial n}{\partial t} \cdot dt \cdot dF \cdot dz; \quad \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial n}{\partial t}. \quad (8.3)$$

Преобразуем уравнение (8.3) к виду, содержащему эффективное давление  $p_z$ , используя для этого закон фильтрации Дарси при преобразовании левой части уравнения (8.3) и закон уплотнения Терцаги для преобразования правой части этого уравнения:

$$\begin{aligned} q &= -k_\phi \cdot \frac{\partial H_w}{\partial z}; \quad H_w = \frac{p_w}{\gamma_w} = \frac{p - p_z}{\gamma_w}; \\ q &= \frac{k_\phi}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z}; \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{k_\phi}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2}; \\ n &= \frac{e}{1+e} \approx \frac{e}{1+e_0}; \quad \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{1+e_0} \cdot \frac{\partial e}{\partial t}; \quad de = -m dp_z; \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{m}{1+e_0} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial t} = -m_v \frac{\partial p_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Подставляя выражения (8.4) в уравнение (8.3), получим:

$$\frac{k_{\phi}}{\gamma_w \cdot m_v} \cdot \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} = \frac{\partial p_z}{\partial t}; \quad C_v \cdot \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} = \frac{\partial p_z}{\partial t}; \quad C_v = \frac{k_{\phi}}{\gamma_w \cdot m_v}, \quad (8.5)$$

где  $C_v$  – **коэффициент фильтрационной консолидации, прямо пропорциональный коэффициенту фильтрации и обратно пропорциональный коэффициенту относительной сжимаемости грунта.**

Уравнение (8.5) является искомым уравнением неразрывности движения поровой воды. Интегрированием уравнения (8.5) при заданных граничных условиях могут быть получены решения различных задач теории фильтрационной консолидации грунтового основания. Уравнение (8.5) широко известно в физике как уравнение Фурье. С помощью уравнений подобной структуры описывают многие явления в природе, такие как нестационарные процессы теплопередачи, диффузии и т.п. Для одномерной задачи фильтрационной консолидации граничные условия можно представить следующими зависимостями:

$$p = \text{const}; \quad \text{при } z = h \quad \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0;$$

$$\text{при } t = 0 \text{ и } z \neq 0 \quad p_z = 0; \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad p_z = p \quad (8.6)$$

Решение уравнения (8.5) с граничными условиями (8.6) может быть представлено в следующем виде:

$$p_z(z, t) = p \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi \cdot z}{2 \cdot h} \cdot e^{-N} - \frac{4}{3 \cdot \pi} \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} \cdot e^{-9N} - \frac{4}{5 \cdot \pi} \sin \frac{5 \pi z}{2 \cdot h} \cdot e^{-25N} - \dots \right];$$

$$N = \frac{\pi^2 \cdot C_v}{4 \cdot h^2} \cdot t. \quad (8.7)$$

Симметричные условия двухсторонней фильтрации поровой воды относительно середины слоя можно трактовать как условия односторонней фильтрации при наличии в середине слоя водоупора. В связи с этим практический интерес вызывает давление в скелете грунта на границе водоупора, т.е. на глубине  $h$ , и связанное с ним сопротивление сдвигу  $\tau(t)$ :

$$p_h(t) \approx p \cdot \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \cdot e^{-N} \right]; \quad \tau(t) \approx p_h(t) \cdot \text{tg} \varphi + c. \quad (8.8)$$

**Степенью консолидации** называют отношение осадки основания, проявившейся за время  $t$ , к величине полной стабилизированной осадки. В

условиях одномерной задачи фильтрационной консолидации, когда  $p = \text{const}$ , степень консолидации можно определить как отношение площади эпюры давлений в скелете грунта в момент времени  $t$  к площади эпюры стабилизированных давлений при  $t \rightarrow \infty$ :

$$U(t) = \frac{s_t}{s} = \int_0^h \frac{p_z dz}{F_p}; \quad F_p = p h;$$

$$U(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( e^{-N} + \frac{1}{9} e^{-9N} + \frac{1}{25} e^{-25N} + \dots \right). \quad (8.9)$$

В большинстве практических случаев можно с достаточной степенью точности ограничиться первым слагаемым в скобках выражения (8.9). Тогда нестабилизированная осадка  $s_t$  определится формулой:

$$s_t = s \cdot U(t) = s \cdot \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot e^{-N} \right). \quad (8.10)$$

Подставляя в формулу (8.10) выражение осадки  $s$  в соответствии с решением для одномерной задачи компрессионного уплотнения, окончательно получим:

$$s_t = m_v \cdot p \cdot h \cdot U(t) = \beta \cdot \frac{p \cdot h}{E} \cdot U(t). \quad (8.11)$$

Таким образом, решение одномерной задачи фильтрационной консолидации отличается от соответствующего решения одномерной задачи компрессионного уплотнения наличием в формуле для вычисления осадки множителя  $U(t)$ , представляющего собой степень консолидации грунта.

**2. Влияние начального градиента на процесс уплотнения водонасыщенного грунта.** Запишем выражение для закона фильтрации Дарси с учетом начального градиента:

$$q = -k_\phi \left( \frac{\partial H_w}{\partial z} - \frac{\partial H_{w0}}{\partial z} \right) = -k_\phi \left( \frac{\partial H_w}{\partial z} - i_0 \right), \quad (8.12)$$

где  $i_0$  – начальный градиент гидравлического напора.

Если градиент гидравлического напора в поровой воде не превосходит некоторой величины, называемой начальным градиентом, движение в поровой воде отсутствует. Как уже отмечалось ранее, начальный градиент гидравлического напора является одной из фильтрационных характеристик

грунта, определяющих степень его проницаемость по отношению к процессам движения поровой воды. Наличие начального градиента приводит к образованию в слое водонасыщенного грунта так называемых «мертвых зон», в которых процессы фильтрационного уплотнения не происходят. Конфигурацию этих зон легко установить, если процесс уплотнения представить графиками давлений, выраженных в пьезометрических единицах  $H = p / \gamma_w$  (рис. 8.3).

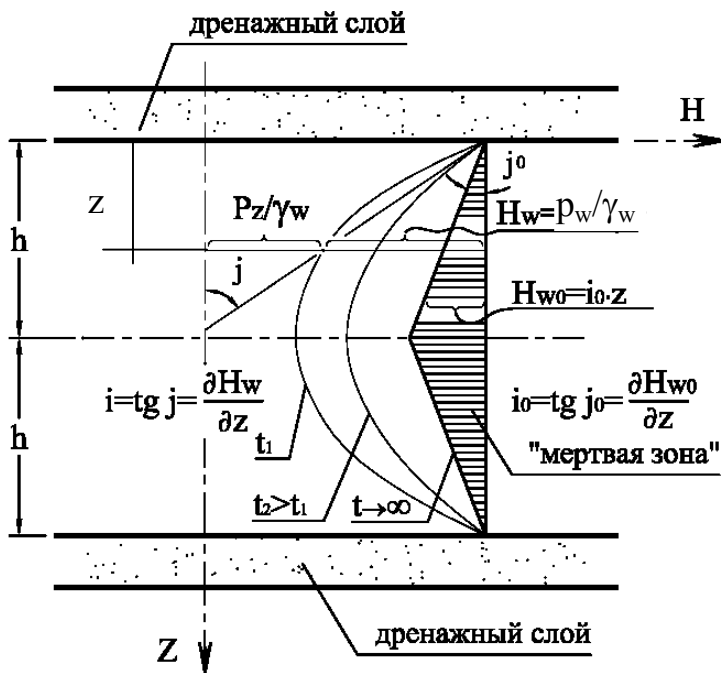


Рис. 8.3. Перераспределение давлений в скелете грунта ( $P_z$ ) с учетом начального градиента ( $i_0$ ):  $t_1, t_2, t$  – время с начала передачи давления ( $P$ ) на слой грунта толщиной  $2 \cdot h$ .

В процессе консолидации давления в скелете грунта будут равны  $p_z = (H - H_w) \cdot \gamma_w$ , где  $H$  – уплотняющее давление;  $H_w$  – избыточное давление в поровой воде. При наличии начального градиента избыточное давление в поровой воде уменьшается в процессе консолидации не до нуля, а до конечной величины, равной  $H_{w0} = i_0 \cdot z$ . На рис. 8.3 граница остаточных давлений в поровой воде изобразится графиками, наклоненными к вертикальной оси под углом  $j_0$ ,  $\text{tg } j_0 = i_0$ . При этом влияние начального градиента приводит к уменьшению площади эпюры давлений в скелете грунта на величину площади эпюры остаточных давлений в поровой воде. В конечном счете влияние начального градиента приводит к уменьшению величины стабилизированной осадки. В этом легко убедиться, используя для определения осадки по графикам давлений, изображенным на рис. 8.3, метод послойного суммирования.

**3. Другие задачи фильтрационной консолидации.** В технической литературе приводятся решения других задач фильтрационной консолидации, к

которым относятся: одномерные задачи с учетом неравномерного распределения по толщине слоя уплотняющего давления; задачи, в которых учитывается структурная прочность грунта и сжимаемость газосодержащей поровой воды; плоская и пространственная задача теории фильтрационной консолидации. В современной механике грунтов задачи теории фильтрационной консолидации исследуются как проблемы гидродинамики грунтовых массивов. При этом широко используются численные методы анализа, такие как метод конечных элементов, метод граничных элементов и др. (см., например, Громадка П.Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 330 с.).

**4. Границы фильтрационной консолидации.** Установление границ фильтрационных процессов имеет практическое значение при исследовании деформируемости во времени водонасыщенных грунтов. Для этих грунтов характерно протекание после завершения фильтрационного уплотнения **вторичной консолидации**, связанной с развитием деформаций ползучести в скелете грунта. Наиболее надежным способом установления момента окончания фильтрационного уплотнения является измерение в опыте величины порового давления. Стабилизация этого параметра однозначно свидетельствует о завершении фильтрационной (первичной) консолидации. Другие методы основаны на анализе графиков деформирования грунта. Метод Тейлора основан на анализе графика, построенного в осях «осадка – корень квадратный из времени» (рис. 8.4 а). Точка пересечения касательной к этому графику с осью осадок определяет начальную осадку, при которой разрушаются структурные связи в скелете грунта и начинается процесс фильтрационного уплотнения. Метод Казагранде основан на анализе графика, построенного в осях «осадка - логарифм десятичный времени» (рис. 8.4 б). График имеет начальный криволинейный участок и два прямолинейных участка, сопряженных кривой. Пересечение касательных к двум последним участкам графика дают точку, определяющую осадку и время в момент завершения фильтрационного уплотнения грунта (степень консолидации равна единице). С этого момента нестационарные процессы, протекающие в грунте, в основном связаны с ползучестью его скелета.

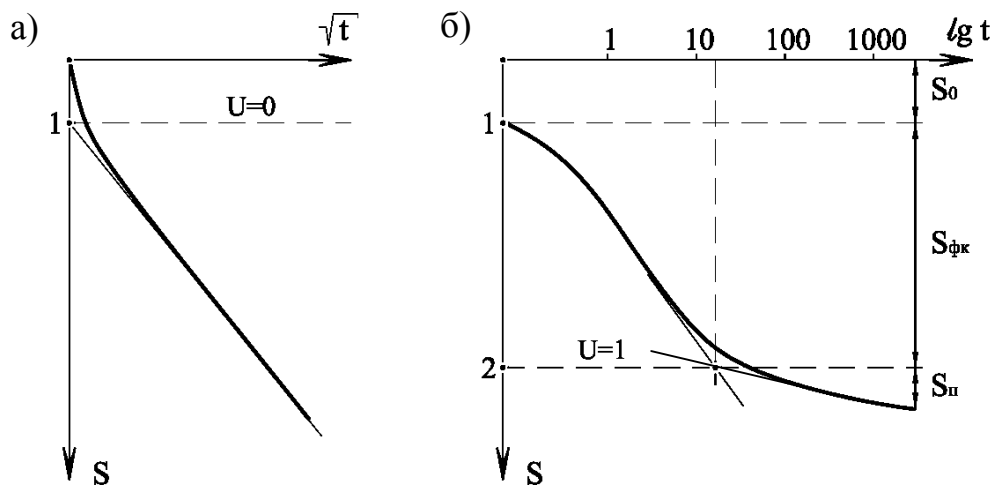


Рис. 8.4. Методы установления границ первичной и вторичной консолидации грунта: *а* – метод Тейлора; *б* – метод Казагранде;  $U$  – степень консолидации;  $S_0$  – мгновенная осадка;  $S_{фк}$  – осадка, обусловленная фильтрационной консолидацией;  $S_n$  – осадка, вызванная ползучестью грунта.

**5. Реологические модели грунтового основания.** Разработаны одномерные, плоские и пространственные реологические модели грунтового основания. Теоретической основой этих моделей является техническая теория ползучести. Наибольшее распространение для описания реологических свойств грунтов получила наследственная теория ползучести Больцмана – Вольтерры и пластично-вязкая модель Бингама – Шведова. Различают (рис. 8.5) три стадии ползучести грунта.

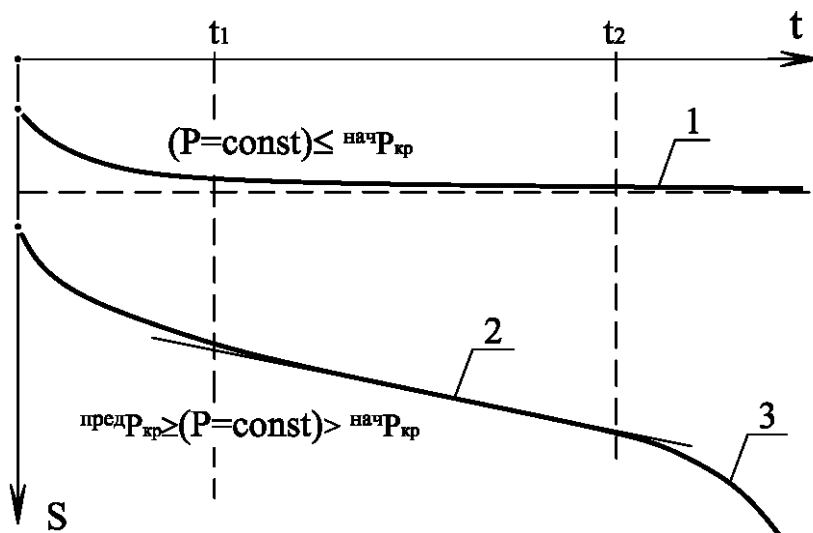


Рис. 8.5. Стадии ползучести грунта:  
1 – затухающая;  
2 – незатухающая;  
3 – прогрессирующая.

**Стадия затухающей ползучести.** Протекает при напряжениях, не превышающих длительной прочности грунта. Как правило, это диапазон напряжений в фазе уплотнения грунта. Признаком затухания деформаций ползучести является стремление к нулю первой производной от деформации по времени ( $d\varepsilon / dt \rightarrow 0$ ). **Стадия незатухающей ползучести** характерна для фазы



сдвигов, когда уровень действующих напряжений превышает длительную прочность грунта. Признаком незатухающей ползучести является стационарное значение первой производной от деформации по времени ( $d\varepsilon / dt = \text{const}$ ). Незатухающая ползучесть переходит в стадию **прогрессирующей ползучести**, когда необратимые деформации достигают предельного значения. Этот вид ползучести может протекать как в фазе сдвигов, так и в фазе выпора. Признаком прогрессирующей ползучести является стремление к бесконечности скорости деформации ( $d\varepsilon / dt \rightarrow \infty$ ). В стадии незатухающей и прогрессирующей ползучести протекают дилатансионные процессы, связанные с изменением объема грунта под воздействием касательных напряжений.

Реологическое уравнение для компрессионного сжатия в стадии затухающей ползучести в соответствии с наследственной теорией Больцмана – Вольтерры имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\beta}{E_{\text{мгн}}} \left[ \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) d\tau \right]; \quad K(t-\tau) = \delta e^{-\delta_1(t-\tau)}, \quad (8.13)$$

где  $K(t-\tau)$  – ядро ползучести;  $\delta, \delta_1$  – экспериментально определяемые параметры ползучести;  $\beta$  – коэффициент вида напряженного состояния при компрессионном сжатии.

Наследственный характер уравнения (8.13) поясняется графиком на рис. 8.6. Импульс силового воздействия  $\sigma(\tau) \cdot d\tau$  вызывает тем большее приращение деформации ползучести, чем более длительное время он действует. При этом время действия силового импульса вычисляется как  $(t - \tau)$ , где  $t$  – время, отсчитываемое от начала процесса нагружения грунта;  $\tau$  – время, отсчитываемое от момента приложения силового импульса  $\sigma(\tau) \cdot d\tau$ .

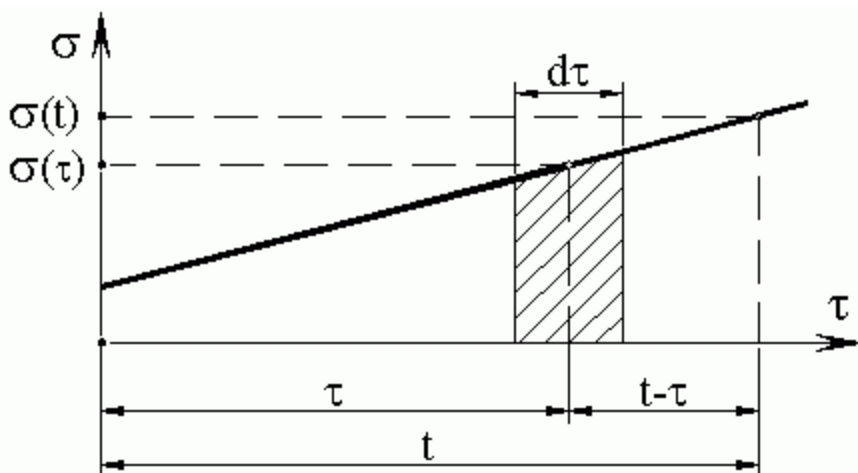


Рис. 8.6. Схема учета длительности нагружения в наследственной теории ползучести Больцмана-Вольтерры.

Реологическое уравнение при сдвиге грунта в стадии незатухающей ползучести, основанное на модели пластично–вязкого течения Бингама – Шведова, имеет вид:

$$\tau(t) = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + c_c + \eta \cdot \frac{d\gamma}{dt}, \quad (8.14)$$

где  $\sigma$  – нормальные напряжения на площадке сдвига;  $\varphi$  – угол внутреннего трения грунта в заданном состоянии (минимальное значение);  $c_c$  – сцепление, соответствующее структурной прочности грунта;  $\eta$  – коэффициент вязкости грунта (кПа·с);  $\gamma$  – сдвиговая деформация;  $t$  – время.

Сопротивление грунта сдвигу, равное первым двум слагаемым в формуле (8.14), называют **длительной прочностью** грунта. Уравнение (8.14) используется при проверке устойчивости против сдвига плотин и подпорных стен.

**6. Нелинейные модели грунтового основания.** Используются для расчета осадок основания, когда напряжения в грунтовом массиве превышают расчетное сопротивление грунта. Основываются на теории коэффициента жесткости или уравнениях теории пластичности.

В нелинейной модели вместо коэффициентов жесткости используют функциональную зависимость осадки поверхности основания в расчетной точке от действующего контактного напряжения (давления). Указанная зависимость имеет вид:

$$S = \frac{p \cdot \bar{S}}{p_u - p}; \quad \bar{S} = S' \cdot \left( \frac{p_u}{p'} - 1 \right), \quad (8.15)$$

где  $S'$  – полная осадка основания по рассматриваемой вертикали, определяемая по формуле (7.12) из лекции 7 при давлении  $p'$ ;  $p'$  – среднее давление по подошве фундамента, не превышающее расчетного сопротивления грунта (обычно принимается равным расчетному сопротивлению грунта);  $p_u$  – предельное сопротивление грунта основания, определяемое по нормам проектирования оснований фундаментов.

Коэффициенты жесткости основания при разгрузке в этом случае определяются по формуле:

$$C_{zp} = p / S_{el}, \quad (8.16)$$

где  $S_{el}$  – упругая осадка при давлении  $p$ , определяемая по формуле (7.11) из лекции 7.

В исследовательских работах находят применение специальные вычислительные программы для расчета грунтовых оснований, реализующие различные версии теории пластичности (И.П. Бойко, Д.М. Шапиро, А.А. Петраков и др.). В основном указанные программы реализуют модифицированные уравнения состояния теории пластического течения или деформационной теории пластичности для связно-сыпучей среды. Отличие этих уравнений состоит в постулировании различных гипотез о коллинеарности векторов напряжений, деформаций и их скоростей на основании результатов экспериментальных проверок. В связи с этим использование таких вычислительных программ предполагает экспериментальное определение дополнительных характеристик грунтов, устанавливающих параметры нелинейного деформирования, формы дилатансионного разрушения и т.п. Поскольку получение таких характеристик нормами на проектирование оснований не предусмотрено, использование указанных вычислительных программ в проектной практике ограничено.

Значительно большее распространение получили нелинейные алгоритмы, описывающие нелинейную работу грунтового массива, основанные на решении смешанной задачи теории упругости и пластичности для связно-сыпучей среды (А.К. Бугров, А.Б. Фадеев и др.). Здесь предполагается, что до исчерпания прочности грунт деформируется линейно, а после исчерпания прочности переходит в состояние пластического течения. Для решения таких задач вполне достаточно иметь стандартные характеристики деформативности и прочности грунтов, к которым относятся: модуль деформации  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$ , угол внутреннего трения  $\varphi$  и сцепление  $c$ .

Методическая последовательность решения упруго-пластической задачи для грунтового массива иллюстрируется ниже приводимым алгоритмом, реализованным в программном комплексе "Полифем". Алгоритм тестирован при определении начального критического давления на весомое основание в соответствии с аналитическим решением (задача Пузыревского).

Грунт представляется связно-сыпучим упруго-пластическим материалом, работающим упруго до исчерпания прочности и переходящим в пластическое течение при последующем нагружении. Диаграмма прочности грунта как анизотропного связно-сыпучего материала описывается с использованием условия прочности Кулона-Мора:

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4 \cdot \tau_{zx}^2}{(2 \cdot c_I \cdot \operatorname{ctg} \varphi_I - \sigma_x - \sigma_z)^2} = \sin^2 \varphi_I, \quad (8.17)$$

где  $\sigma_z, \sigma_x, \tau_{zx}$  – компоненты тензора напряжений;  $c_I, \varphi_I$  – прочностные характеристики грунта для предельных состояний первой группы.

*Примечание:* В формуле (8.17) сжимающие напряжения в грунте принимаются в соответствии с правилами строительной механики со знаком "минус", что отличается от правила знаков, принятого в механике грунтов.

Для реального напряженного состояния определяется коэффициент  $k$  приближения конечного элемента к предельному состоянию. При умножении на этот коэффициент тензора напряжений должно выполняться в конечном элементе равенство (8.17). Таким образом, допредельному состоянию работы грунта соответствует коэффициент  $k$ , больший единицы.

Реальные нагружения разделяются на ступени. В пределах ступени нагружение считается условно простым. Таким образом, точность решения задачи увеличивается с уменьшением интенсивностей нагружающих параметров на ступени.

Для учета особенностей сложного нагружения суммарные напряжения в точке (конечном элементе) записываются в следующем виде:

$$\sigma_z = \sigma_{zo} + k \cdot \sigma_{zs}; \quad \sigma_x = \sigma_{xo} + k \cdot \sigma_{xs}; \quad \tau_{zx} = \tau_{zxo} + k \cdot \tau_{zxs}, \quad (8.18)$$

где  $\sigma_{zo}, \sigma_{xo}, \tau_{zxo}$  – начальные напряжения (сумма всех напряжений на предыдущих ступенях нагружения);  $\sigma_{zs}, \sigma_{xs}, \tau_{zxs}$  – приращения напряжений (напряжения на рассматриваемой ступени нагружения);  $k$  – коэффициент приближения конечного элемента к предельному состоянию.

Для определения коэффициента  $k$  решается уравнение (8.17) при подстановке в него уравнений (8.18). Результат решения представляется следующим алгоритмом:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{b^2 - 4ad} - b}{2a}; \quad a = (\sigma_{zs} - \sigma_{xs})^2 + 4\tau_{zxs}^2 - \sin^2 \varphi (\sigma_{zs} + \sigma_{xs})^2; \\ b &= 2 \cdot c \cdot \sin 2\varphi (\sigma_{zs} + \sigma_{xs}) + \bar{b}; \\ \bar{b} &= 2[\cos^2 \varphi (\sigma_{zs} \cdot \sigma_{zo} + \sigma_{xs} \cdot \sigma_{xo}) - (1 + \sin^2 \varphi)(\sigma_{zs} \cdot \sigma_{xo} + \sigma_{zo} \cdot \sigma_{xs}) + 4\tau_{zxs} \cdot \tau_{zxo}]; \\ d &= -4c^2 \cos^2 \varphi + \bar{a} + \bar{d}; \quad \bar{a} = (\sigma_{zo} - \sigma_{xo})^2 + \tau_{zxo}^2 - \sin^2 \varphi (\sigma_{zo} + \sigma_{xo})^2; \\ \bar{d} &= 2c \cdot \sin 2\varphi (\sigma_{zo} + \sigma_{xo}). \end{aligned} \quad (8.19)$$

В качестве расчетного значения коэффициента  $k$  принимается

$$k_r = \min(k_i(\varphi_I, c_I)), \quad (8.20)$$

где  $k_i$  – коэффициент приближения к предельному состоянию в  $i^{\text{ом}}$  конечном элементе.

Решение задачи осуществляется безитерационным методом последовательных нагружений. По результатам упругого расчета определяется минимальный для конструкции коэффициент приближения к предельному состоянию и, если он меньше или равен единице, в разрушенных элементах принимается жесткость (модуль деформации), равная машинному нулю. Нагрузка на ступени нагружения учитывается в этом случае как заданная величина, умноженная на коэффициент приближения к предельному состоянию.

Для элементов, перешедших в состояние течения, проверяется условие разгрузки. Признаком разгрузки может являться увеличение коэффициента  $\bar{k}$ , отнесенного к суммарным напряжениям, на двух смежных ступенях нагружения. При этом коэффициент  $\bar{k}$  вычисляется по формулам (8.19), в которых начальные напряжения (с индексом 'o') принимаются равными нулю, а приращения напряжений (с индексом 's') равными суммарным напряжениям. Если обнаружены элементы, в которых происходит разгрузка, в последних восстанавливается первоначальная жесткость (модуль деформации) и производится перерасчет конструкции для этой ступени нагружения.

Результатами решения задачи являются: полные перемещения, напряжения и деформации на ступени нагружения; коэффициенты приближения к предельным состояниям по напряжениям и деформациям; учитываемые на ступени нагружения нагрузки и воздействия; графическая информация о достижении в элементах системы предельных состояний по напряжениям и деформациям; протокол решения задачи с информацией о достижении предельных состояний в элементах системы и переопределении жесткостных характеристик.

## **Практические задания по курсу "Механика грунтов"**

### Тематический план практических занятий

Курс практических занятий рассчитан на 18 учебных часов.

Тема М.1. Строительные свойства грунтов. Основные закономерности механики грунтов (2 часа).

Тема М.2. Сжимаемость грунтов. Прочность грунтов. Фильтрационные свойства грунтов (2 часа).

Тема М.3. Распределение напряжений в грунтовом массиве от действия внешней нагрузки (4 часа).

Тема М.4. Теория предельного напряженного состояния грунтовых массивов (4 часа).

Тема М.5. Расчетные модели грунтовых оснований. Расчет осадок оснований. Фильтрационная консолидация и ползучесть грунтов (6 часов).

## **Тема М.1. Строительные свойства грунтов. Основные закономерности механики грунтов.**

М.1.1. Как изменяется поровое давление в грунте при постоянной его температуре, если в порах наблюдается: парообразование; газорастворение; конденсация пара; газовыделение?

Парообразование и газовыделение свидетельствуют об уменьшении порового давления при постоянной температуре.

Газорастворение и конденсация пара происходит при повышении порового давления в условиях постоянной температуры.

М.1.2. При извлечении образца грунта с большой глубины поровое давление приобрело отрицательное (по сравнению с атмосферным давлением) значение. Какие процессы фазовых переходов могут быть вызваны этим явлением?

При отрицательном поровом давлении происходит парообразование и газовыделение из поровой воды.

М.1.3. Как называются явления массопереноса в грунте в форме: движения поровой воды; перемещения минеральных частиц грунта?

Массоперенос в форме движения поровой воды называется фильтрацией.

Массоперенос в форме перемещения частиц грунта называется механической суффозией.

М.1.4. Назовите пять основных упрощающих допущений классической механики грунтов.

1) грунт деформируется как квазиоднородное упругое тело, если напряжения в скелете грунта не превышают его структурную прочность;

2) поровая вода является несжимаемой;

3) присутствие в порах газа и пара не оказывает существенного влияния на процесс деформирования грунта;

4) сжимаемость минеральных частиц грунта пренебрежимо мала;

5) деформативность грунта обусловлена переупаковкой скелета после разрушения структурных связей, приводящей к изменению объема пор.

М.1.5. Как изменяется деформация грунта при действии неизменной нагрузки, если модуль упругости частиц скелета грунта увеличится в 10 раз?

Одним из допущений классической механики грунтов является пренебрежение сжимаемостью минеральных частиц грунта. Поэтому изменение модуля упругости частиц грунта не повлияет на величину деформации грунта при неизменной нагрузке.

М.1.6. Как изменится объемная деформация полностью водонасыщенного грунта при отсутствии дренирования в условиях компрессионного сжатия, если давление  $P$  увеличится в 10 раз?

Одним из допущений классической механики грунтов является предположение о несжимаемости поровой воды и минеральных частиц грунта. Из этого следует, что при отсутствии возможности фильтрации в полностью водонасыщенном грунте изменение давлений в грунте не приводит к его деформированию.

М.1.7. Вывести формулу для определения производной характеристики грунта  $\rho_d$  через основные характеристики  $\rho$  и  $W$ .

По определению плотность сухого грунта есть отношение массы частиц грунта к объему грунта.

Введем обозначения:  $V$  – объем грунта;  $G$  – масса грунта;  $G_s$  – масса частиц грунта;  $G_w = G - G_s$  – масса воды в порах грунта;  $W = G_w / G_s$  – влажность грунта.

С учетом введенных определений вывод формулы имеет вид:

$$\rho_d = \frac{G_s}{V} = \frac{G - G_w}{V} = \rho - \frac{G_s \cdot W}{V} = \rho - W \cdot \rho_d, \text{ откуда } \rho_d = \frac{\rho}{1 + W}.$$

При выводе формулы учтено, что плотность грунта есть отношение массы грунта к объему грунта, а масса воды в порах грунта равна произведению массы частиц грунта на влажность грунта в долях единицы.

М.1.8. Вывести формулу для определения коэффициента пористости грунта через основную характеристику  $\rho_s$  и производную характеристику  $\rho_d$ .

По определению коэффициент пористости грунта есть отношение объема пор к объему частиц грунта.

Введем обозначения:  $V$  – объем грунта;  $V_s$  – объем частиц грунта;  $V_n$  – объем пор;  $G_s$  – масса частиц грунта.

Расчетную формулу получим преобразованием исходного выражения

$$e = \frac{V_n}{V_s} = \frac{V - V_s}{V_s} = \frac{V}{V_s} - 1 = \left( \frac{G_s}{\rho_d} \right) / \left( \frac{G_s}{\rho_s} \right) - 1 = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1 = \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_d}.$$

М.1.9. Вывести формулу для определения пористости грунта через основную характеристику  $\rho_s$  и производную характеристику  $\rho_d$ .

По определению пористость грунта есть отношение объема пор к объему грунта:  $n = V_n / V$ .

Обозначения величин примем в соответствии с предыдущими задачами.

Расчетную формулу получим преобразованием исходного выражения

$$n = \frac{V_n}{V} = \frac{V - V_s}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} = 1 - \left( \frac{G_s}{\rho_s} \right) / \left( \frac{G_s}{\rho_d} \right) = 1 - \frac{\rho_d}{\rho_s} = \frac{\rho_s - \rho_d}{\rho_s}.$$

М.1.10. Вывести формулу для определения степени влажности грунта через основные характеристики  $\rho_s$ ,  $\rho_w$ ,  $W$  и производную характеристику  $e$ .

По определению степень влажности есть отношение объема воды в порах к объему пор:  $S_r = V_w / V_n$ .

$$S_r = \frac{V_w}{V_n} = \left( \frac{G_w}{\rho_w} \right) / (V_s \cdot e) = \left( \frac{G_s \cdot W}{\rho_w} \right) / \left( \frac{G_s \cdot e}{\rho_s} \right) = \frac{\rho_s}{\rho_w} \cdot \frac{W}{e}.$$

М.1.11. Вывести формулы, устанавливающие зависимости между:

а) коэффициентом пористости и пористостью;

б) пористостью и коэффициентом пористости.

По определению коэффициент пористости это отношение объема пор к объему частиц грунта, а пористость это отношение объема пор к объему грунта:

$$e = V_n / V_s; n = V_n / V.$$



Из этих соотношений следует, что  $e \cdot V_s = n \cdot V$ , откуда:

$$e = n \cdot V / V_s = n \cdot (V_n + V_s) / V_s = n \cdot (V_n / V_s + 1) = n \cdot (e + 1).$$

Из полученного выражения имеем:

а)  $e = n / (1 - n)$ ;

б)  $n = e / (1 + e)$ .

М.1.12. Вывести формулу для определения удельного веса грунта во взвешенном в воде состоянии.

В соответствии с законом Архимеда вес грунта во взвешенном состоянии равен весу частиц грунта, уменьшенному на вес объема воды, равного объему частиц грунта:

$$G_{sb} = G_s - V_s \cdot \gamma_w.$$

Введем обозначения:  $V$  – объем грунта;  $\gamma_d$  – удельный вес сухого грунта;  $\gamma_s$  – удельный вес частиц грунта;  $e = \gamma_s / \gamma_d - 1$  – коэффициент пористости.

Преобразуем исходное выражение:

$$G_{sb} = G_s - V_s \cdot \gamma_w = V \cdot \gamma_d - (G_s / \gamma_s) \cdot \gamma_w = V \cdot [\gamma_d - (\gamma_d / \gamma_s) \cdot \gamma_w] = V \cdot (\gamma_d / \gamma_s) \cdot (\gamma_s - \gamma_w) = V \cdot (\gamma_s - \gamma_w) / (1 + e).$$

Удельный вес грунта во взвешенном состоянии определяем как его вес во взвешенном состоянии, отнесенный к объему грунта:

$$\gamma_{sb} = G_{sb} / V = (\gamma_s - \gamma_w) / (1 + e).$$

М.1.13. В приводимой ниже таблице в столбце «степень пригодности» выполнить экспертную оценку грунтовых условий по группе физических характеристик грунта, отметив знаком «+» более предпочтительные для целей строительства условия. Заполнить также столбец «единицы измерения».

Характеристика	Единицы измерения	Значение	Степень пригодности
e	доли единицы	0,47	+
		0,92	
$\rho_d$	т/м <sup>3</sup>	1,75	+
	кг/м <sup>3</sup>	1600	
	кг/м <sup>3</sup>	1200	
$\gamma_d$	кН/м <sup>3</sup>	13	+
	кН/м <sup>3</sup>	15	
$S_r$	доли единицы	0,7	+
		0,9	
$I_L$	доли единицы	-0,1	+
		0,2	
		0,9	

Единицы измерения приведены в таблице выделенным шрифтом. Предпочтительными для целей строительства являются грунты: с меньшим значением коэффициента пористости ( $e$ ); с большим значением плотности сухого грунта ( $\rho_d$ ); с большим значением удельного веса сухого грунта ( $\gamma_d$ ); с меньшим значением степени влажности ( $S_r$ ); с меньшим значением показателя текучести ( $I_L$ ).

М.1.14. Влажность грунта на границе пластичности составляет 12 %. Природная влажность грунта 20 %, показатель текучести 0,5, определить вид грунта.

Для установления вида грунта необходимо вычислить число пластичности. Для этих целей можно использовать выражение для определения показателя текучести:

$$I_L = (W - W_p) / I_p,$$

где  $W$  и  $W_p$  – соответственно природная влажность и влажность на границе пластичности грунта. Из приведенной формулы следует, что

$$I_p = (W - W_p) / I_L = (0,2 - 0,12) / 0,5 = 0,16.$$

Поскольку  $0,07 \leq I_p < 0,17$ , данный грунт является суглинком.

М.1.15. Удельный вес частиц грунта  $27 \text{ кН/м}^3$ , удельный вес сухого грунта  $13,5 \text{ кН/м}^3$ . Определить удельный вес грунта во взвешенном состоянии, если удельный вес воды равен  $10 \text{ кН/м}^3$ .

Удельный вес грунта во взвешенном состоянии определяется по формуле

$$\gamma_{sb} = (\gamma_s - \gamma_w) / (1 + e).$$

Коэффициент пористости, входящий в указанную формулу, определяется из выражения

$$e = (\gamma_s - \gamma_d) / \gamma_d = (27 - 13,5) / 13,5 = 1,0.$$

С учетом вычисленного значения коэффициента пористости будем окончательно иметь

$$\gamma_{sb} = (\gamma_s - \gamma_w) / (1 + e) = (27 - 10) / (1 + 1) = 8,5 \text{ кН/м}^3.$$

М.1.16. Число пластичности грунта 0,16, показатель текучести 0,5, влажность на границе пластичности 12 %. Определить степень влажности грунта, если удельный вес воды  $10 \text{ кН/м}^3$ , удельный вес частиц грунта  $27 \text{ кН/м}^3$ , удельный вес сухого грунта  $16,2 \text{ кН/м}^3$ .

Степень влажности грунта рассчитывается по формуле

$$S_r = (\gamma_s \cdot W) / (\gamma_w \cdot e).$$

Влажность грунта может быть вычислена из выражения для определения показателя текучести

$$I_L = (W - W_p) / I_p; W = I_L \cdot I_p + W_p = 0,5 \cdot 0,16 + 0,12 = 0,2.$$

Коэффициент пористости, входящий в формулу для определения степени влажности, определяется из выражения

$$e = (\gamma_s - \gamma_d) / \gamma_d = (27 - 16,2) / 16,2 = 0,667.$$

С учетом вычисленного значения природной влажности грунта и коэффициента пористости грунта окончательно будем иметь

$$S_r = (\gamma_s \cdot W) / (\gamma_w \cdot e) = (27 \cdot 0,2) / (10 \cdot 0,667) = 0,81.$$

М.1.17. Влажность грунта 20 %. Удельный вес грунта  $18 \text{ кН/м}^3$ . Определить вес воды, содержащейся в  $5 \text{ м}^3$  грунта.

Из определения влажности следует, что вес воды, содержащейся в грунте, будет равен

$$G_w = G_s \cdot W = V \cdot \gamma_d \cdot W.$$

Удельный вес сухого грунта определяется по формуле

$$\gamma_d = \gamma / (1 + W).$$

С учетом выражения для удельного веса сухого грунта будем иметь

$$G_w = V \cdot \gamma_d \cdot W = V \cdot \gamma \cdot W / (1 + W) = 5 \cdot 18 \cdot 0,2 / (1 + 0,2) = 15 \text{ кН}.$$

*М.1.18. Коэффициент пористости грунта равен 1. Чему равна пористость грунта?*

Пористость грунта вычисляется в зависимости от коэффициента пористости по формуле

$$n = e / (1 + e) = 1 / (1 + 1) = 0,5.$$

*М.1.19. Плотность частиц грунта 2700 кг/м<sup>3</sup>, плотность поровой воды 1000 кг/м<sup>3</sup>, плотность грунта 1620 кг/м<sup>3</sup>, природная влажность 20 %. Определить влажность при полном водонасыщении грунта.*

Влажность при полном водонасыщении грунта может быть определена из выражения для степени влажности грунта при ее значении, равном единице

$$S_r = (\rho_s \cdot W) / (\rho_w \cdot e); \quad S_r = 1; \quad W_{sat} = (\rho_w \cdot e) / \rho_s.$$

Входящий в полученное выражение коэффициент пористости определяем по формуле

$$e = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d.$$

Необходимую для вычислений величину плотности сухого грунта вычисляем по формуле

$$\rho_d = \rho / (1 + W) = 1620 / (1 + 0,2) = 1350 \text{ кг/м}^3.$$

Последующие вычисления производим в такой последовательности

$$e = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d = (2700 - 1350) / 1350 = 1;$$

$$W_{sat} = (\rho_w \cdot e) / \rho_s = (1000 \cdot 1) / 2700 = 0,37 \text{ или } 37 \text{ \%}.$$

*М.1.20. Плотность частиц грунта 2700 кг/м<sup>3</sup>, плотность поровой воды 1000 кг/м<sup>3</sup>, плотность грунта 1620 кг/м<sup>3</sup>, природная влажность 20 %, влажность на границе пластичности 12 %, влажность на границе текучести 33 %. Определить состояние (консистенцию) грунта при его полном водонасыщении.*

Определяем влажность грунта при полном водонасыщении

$$W_{sat} = (\rho_w \cdot e) / \rho_s.$$

Предварительно вычисляем плотность сухого грунта и по его значению коэффициент пористости

$$\rho_d = \rho / (1 + W) = 1620 / (1 + 0,2) = 1350 \text{ кг/м}^3;$$

$$e = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d = (2700 - 1350) / 1350 = 1,0.$$

Окончательно для влажности при полном водонасыщении имеем

$$W_{sat} = (\rho_w \cdot e) / \rho_s = (1000 \cdot 1,0) / 2700 = 0,37.$$

Определяем показатель текучести грунта в состоянии полного водонасыщения

$$I_L = (W_{sat} - W_p) / (W_L - W_p) = (0,37 - 0,12) / (0,33 - 0,12) = 1,19.$$

Поскольку  $I_L \geq 1$ , состояние грунта текучее. Такой грунт является непригодным для целей строительства, так как при полном водонасыщении переходит в текучую консистенцию, т. е. становится подобным пловуну.

М.1.21. Определить чему будет равен вес  $1 \text{ м}^3$  песка при заполнении пор водой на 50%, если его вес в сухом состоянии равен  $18 \text{ кН}$ , а удельный вес минеральных частиц песка равен  $\gamma_s = 26,5 \text{ кН/м}^3$ .

Если вес  $1 \text{ м}^3$  сухого песка равен  $1,8 \text{ т}$ , значит удельный вес сухого грунта  $\gamma_d = 18 \text{ кН/м}^3$ . Коэффициент пористости песка можно найти по формуле

$$e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1 = \frac{26,5}{18} - 1 = 0,47.$$

Полная влагоемкость грунта определяется по формуле

$$w_{sat} = \frac{e \cdot \gamma_w}{\gamma_s} = \frac{0,47 \cdot 10}{26,5} = 0,177,$$

где  $\gamma_w$  – удельный вес воды, принимаемый равным  $10 \text{ кН/м}^3$ .

Учитывая то, что полная влагоемкость грунта это влажность, при которой поры полностью заполнены водой, определяем влажность грунта при которой поры будут заполнены водой на 50% по следующей формуле

$$w_{50} = w_{sat} / 2 = 0,177 / 2 = 0,089$$

Определяем удельный вес грунта по формуле

$$\gamma_{50} = \gamma_d \cdot (1 + w_{50}) = 18 \cdot 1,089 = 19,6 \text{ кН/м}^3$$

Таким образом,  $1 \text{ м}^3$  песка с порами, заполненными на 50 % водой, будет весить  $19,6 \text{ кН}$ .

М.1.22. Какой объем воды необходим для увлажнения  $1 \text{ м}^3$  песка до полного водонасыщения, если его природная влажность составляет  $w=0,15$ , плотность равна  $\rho = 1,88 \text{ т/м}^3$ , а плотность минеральных частиц песка равна  $\rho_s = 2,65 \text{ т/м}^3$ ?

Плотность сухого грунта  $\rho_d = \rho / (1+W) = 1,88 / (1+0,15) = 1,635 \text{ т/м}^3$ .

Коэффициент пористости песка можно найти по формуле

$$e = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1 = \frac{2,65}{1,635} - 1 = 0,62.$$

Полная влагоемкость грунта определяется по формуле

$$w_{sat} = \frac{e \cdot \rho_w}{\rho_s} = \frac{0,62 \cdot 1}{2,65} = 0,234,$$

где  $\rho_w$  – плотность воды, принимаемая равной  $1 \text{ т/м}^3$ .

Плотность водонасыщенного грунта

$$\rho_{sat} = \rho_d \cdot (1 + W_{sat}) = 1,635 \cdot (1 + 0,234) = 2,018 \text{ т/м}^3.$$

Масса воды, необходимая для полного водонасыщения, будет равна

$$G_{w,sat} - G_w = G_s \cdot (W_{sat} - W) = V \cdot \rho_d \cdot (W_{sat} - W) = 1,635 \cdot 1 \cdot (0,234 - 0,15) = 0,138 \text{ т}.$$

Соответственно объем воды составит

$$V_{w,sat} - V_w = (G_{w,sat} - G_w) / \rho_w = 0,223 / 1 = 0,223 \text{ м}^3.$$

Этот же результат можно получить из сопоставления плотностей грунта при полном водонасыщении и в природном состоянии:

$$G_{w,sat} - G_w = V \cdot (\rho_{sat} - \rho) = 1 \cdot (2,018 - 1,88) = 0,138 \text{ т}.$$

## Тема М.2. Сжимаемость грунтов. Прочность грунтов.

### Фильтрационные свойства грунтов.

М.2.1. Жесткая обойма в форме кольца с внутренним диаметром 70 мм, толщиной стенки 2 мм и высотой 30 мм заполнено грунтом, коэффициент Пуассона которого 0,40. Определить кольцевые напряжения в жесткой обойме, если к свободным поверхностям грунта приложено уравновешенное давление 300 кПа.

Для решения задачи необходимо вычислить боковое давление в грунте, т.е. напряжения в грунте, действующие в плоскости кольца,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Для условий компрессионного сжатия грунта коэффициент бокового давления будет равен

$$\xi = \nu / (1 - \nu) = 0,4 / (1 - 0,4) = 2/3.$$

Напряжения в грунте, действующие в плоскости кольца, будут равны

$$\sigma_x = \sigma_y = \xi \cdot \sigma_z = 2/3 \cdot 300 = 200 \text{ кПа}.$$

Кольцевые напряжения в жесткой обойме определяются из условия равновесия проекций сил на горизонтальную ось в вертикальном сечении кольца, проведенном через его диаметр

$$2 \cdot \sigma_r \cdot \delta \cdot h = \sigma_x \cdot D \cdot h.$$

Из приведенного уравнения равновесия определяем кольцевые напряжения

$$\sigma_r = (\sigma_x \cdot D) / (2 \cdot \delta) = (200 \cdot 0,07) / (2 \cdot 0,002) = 3500 \text{ кПа} = 3,5 \text{ МПа}.$$

М.2.2. Осевая деформация грунта в компрессионном приборе при давлении 300 кПа составляет 0,005. Определить модуль деформации грунта, если его коэффициент Пуассона равен 0,4.

Осевая деформация при компрессионном сжатии грунта вычисляется по формуле

$$\varepsilon_z = \beta \cdot \sigma_z / E,$$

где  $\beta$  – коэффициент вида напряженного состояния

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot \nu^2}{1 - \nu} = 1 - \frac{2 \cdot 0,4^2}{1 - 0,4} = 0,467.$$

Из формулы для определения осевой деформации определяем модуль деформации грунта

$$E = \beta \cdot \sigma_z / \varepsilon_z = 0,467 \cdot 300 / 0,005 = 28020 \text{ кПа} = 28,02 \text{ МПа}.$$

М.2.3. Начальный коэффициент пористости грунта составляет 1,0.

Определить коэффициент пористости грунта при нагружении его в компрессионном приборе, если начальная высота образца уменьшилась на 10%.

Из условия задачи следует, что осевая деформация образца составляет

$$\varepsilon_{z,i} = \Delta h_i / h_0 = 0,1 \cdot h_0 / h_0 = 0,1,$$

где  $h_0$  – первоначальная высота образца.

Зависимость осевой деформации от изменения коэффициента пористости грунта имеет вид

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{(e_0 - e_i)}{(1 + e_0)}, \text{ откуда } e_i = e_0 - \varepsilon_{z,i} \cdot (1 + e_0) = 1 - 0,1 \cdot (1 + 1) = 0,8.$$

М.2.4. Плотность частиц грунта равна  $2700 \text{ кг/м}^3$ , плотность сухого грунта  $1350 \text{ кг/м}^3$ . Чему равна деформация грунта в компрессионном приборе, если начальный коэффициент пористости уменьшился на 10 %?

Данные о плотности частиц грунта и плотности сухого грунта позволяют определить начальный коэффициент пористости

$$e_0 = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d = (2700 - 1350) / 1350 = 1,0.$$

После нагружения коэффициент пористости составит

$$e_i = e_0 - 0,1 \cdot e_0 = 0,9 \cdot e_0.$$

Осевая деформация при изменении коэффициента пористости грунта определяется по формуле

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{(e_0 - e_i)}{(1 + e_0)} = \frac{(e_0 - 0,9 \cdot e_0)}{(1 + e_0)} = \frac{0,1 \cdot e_0}{(1 + e_0)} = \frac{0,1 \cdot 1}{1 + 1} = 0,05.$$

М.2.5. На что указывает знак "минус" в правой части дифференциального уравнения закона уплотнения Терцаги?

График зависимости коэффициента пористости грунта от давления является убывающей функцией. В связи с этим производная коэффициента пористости по давлению есть отрицательная величина. Таким образом, знак "минус" указывает на то, что увеличению давления соответствует уменьшение коэффициента пористости.

М.2.6. Плотность частиц грунта  $2700 \text{ кг/м}^3$ , плотность сухого грунта  $1350 \text{ кг/м}^3$ . При нагружении грунта в компрессионном приборе давлением  $200 \text{ кПа}$  начальный коэффициент пористости уменьшился на 10 %.

Определить модуль деформации грунта при  $\nu = 0,4$ .

Определяем начальный коэффициент пористости грунта

$$e_0 = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d = (2700 - 1350) / 1350 = 1,0.$$

После нагружения коэффициент пористости составит

$$e_i = e_0 - 0,1 \cdot e_0 = 0,9 \cdot e_0.$$

Осевая деформация при изменении коэффициента пористости грунта

$$\varepsilon_{z,i} = \frac{(e_0 - e_i)}{(1 + e_0)} = \frac{(e_0 - 0,9 \cdot e_0)}{(1 + e_0)} = \frac{0,1 \cdot e_0}{(1 + e_0)} = \frac{0,1 \cdot 1}{1 + 1} = 0,05.$$

Вычисляем коэффициент вида напряженного состояния при компрессионном сжатии с учетом того, что  $\nu = 0,4$

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot \nu^2}{1 - \nu} = 1 - \frac{2 \cdot 0,4^2}{1 - 0,4} = 0,467.$$

Модуль деформации грунта определяем по формуле

$$E = \beta \cdot \sigma_z / \varepsilon_z = 0,467 \cdot 200 / 0,05 = 1868 \text{ кПа} = 1,87 \text{ МПа}.$$

М.2.7. Коэффициент сжимаемости грунта равен  $0,0005 \text{ м}^2/\text{кН}$ .

Коэффициент Пуассона грунта  $0,4$ . Определить модуль деформации грунта, если: а)  $e_0 = 1,0$ ; б)  $e_0 = 0,5$ ; в)  $e_0 = 0,8$ .

Вычисляем коэффициенты относительной сжимаемости грунта по формуле

$$m_v = m_0 / (1 + e_0):$$

а)  $m_v = 0,0005 / (1 + 1) = 0,00025$ ;

б)  $m_v = 0,0005 / (1 + 0,5) = 0,00033$ ;

в)  $m_v = 0,0005 / (1 + 0,8) = 0,00028$ .

Вычисляем коэффициент вида напряженного состояния при компрессионном сжатии с учетом того, что  $v = 0,4$

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot v^2}{1 - v} = 1 - \frac{2 \cdot 0,4^2}{1 - 0,4} = 0,467.$$

Вычисляем модули деформации грунта по формуле  $E = \beta / m_v$ :

а)  $E = 0,467 / 0,00025 = 1868$  кПа;

б)  $E = 0,467 / 0,00033 = 1415$  кПа;

в)  $E = 0,467 / 0,00028 = 1668$  кПа.

М.2.8. Чему равен модуль деформации грунта с  $v = 0,3$ , если при нагрузке на круглый штамп площадью  $5000 \text{ см}^2$ , равной  $150 \text{ кН}$ , осадка штампа составила  $1 \text{ см}$ ?

Осадка круглого жесткого штампа определяется по формуле Шлейхера

$$S = \frac{p \cdot d \cdot (1 - v^2)}{E},$$

Определяем диаметр штампа  $d = \sqrt{4 \cdot A / \pi} = \sqrt{4 \cdot 0,5 / 3,14} = 0,8 \text{ м}$ .

Из формулы Шлейхера вычисляем модуль деформации грунта

$$E_0 = \frac{p \cdot d \cdot (1 - v^2)}{S} = \frac{150 \cdot 0,8 \cdot (1 - 0,3^2)}{0,01} = 10920 \text{ кПа} = 10,92 \text{ МПа}.$$

М.2.9. Модуль деформации грунта  $E$ , определенный в компрессионном приборе при  $e_0 = 0,8$ , составил  $2,5 \text{ МПа}$ . С учетом поправочного коэффициента Агишева значение  $E_0$  для натурального грунта составляет  $10 \text{ МПа}$ . Как измениться значение  $E_0$  для натурального грунта, если указанная величина  $E$  в компрессионном приборе получена: а) при  $e_0 = 1,0$ ; б) при  $e_0 = 0,5$ ?

Как следует из условия задачи, коэффициент Агишева при  $e_0 = 0,8$  равен  $m_k = E_0 / E = 10 / 2,5 = 4$ .

Известно, что коэффициент Агишева имеет наименьшее значение для рыхлых грунтов и наибольшее значение для плотных грунтов. То есть

а) при  $e_0 = 1,0 \rightarrow E_0 < 10 \text{ МПа}$ ;

б) при  $e_0 = 0,5 \rightarrow E_0 > 10 \text{ МПа}$ .

М.2.10. Образец грунта испытывается в стабилометре при постоянном боковом давлении  $50 \text{ кПа}$ . Прочностные характеристики грунта составляют:  $c = 20 \text{ кПа}$ ;  $\varphi = 20^\circ$ . При каком вертикальном давлении произойдет разрушение грунта?

Вертикальное давление будет являться в данном опыте большим главным напряжением. Для его определения воспользуемся законом прочности грунта Кулона–Мора, записанным в виде выражения

$$\frac{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Разрешая это уравнение относительно большего главного напряжения, будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) \cdot \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi / 2) - c \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \\ &= (50 + 20 \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ) \cdot \operatorname{tg}^2 (45^\circ + 20^\circ / 2) - 20 \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ = 159,2 \text{ кПа}.\end{aligned}$$

Таким образом, разрушение образца грунта в стабилометре произойдет при вертикальном давлении 159,2 кПа.

*М.2.11. Образец грунта испытывается в стабилометре при постоянном соотношении главных напряжений. Прочностные характеристики грунта:  $c=50$  кПа;  $\varphi=16^\circ$ . Можно ли разрушить образец при любом соотношении главных напряжений. Определить минимальное соотношение большего главного напряжения к меньшему главному напряжению, при котором образец грунта будет разрушен в процессе нагружения.*

Для решения задачи воспользуемся законом прочности грунта Кулона–Мора, записанным в виде выражения

$$\frac{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \frac{\varphi}{2}).$$

Примем  $k = \sigma_1 / \sigma_2$ . Тогда будем иметь

$$\frac{k \cdot \sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \frac{\varphi}{2});$$

$$\frac{k + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi / \sigma_2}{1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi / \sigma_2} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \frac{\varphi}{2}).$$

Поскольку в процессе нагружения напряжения могут принимать любые значения, примем, что  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ . Тогда

$$k = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi/2).$$

Разрушение образца грунта будет иметь место, если

$$k = \sigma_1 / \sigma_2 \geq \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \varphi/2) = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + 16^\circ/2) = 1,761.$$

Таким образом,  $k_{\min} = 1,761$ .

Проверяем полученный результат. Пусть разрушение образца произошло при  $\sigma_2 = 100$  кПа, тогда  $\sigma_1 = k \cdot 100$  кПа. Подставляем эти данные в уравнение прочности Кулона–Мора и определяем  $k$ :

$$\frac{k \cdot 100 + 50 \cdot \operatorname{ctg} 16}{100 + 50 \cdot \operatorname{ctg} 16} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \frac{16}{2});$$

$$\frac{k \cdot 100 + 174,371}{100 + 174,371} = 1,761;$$

$$k = [100 \cdot 1,761 + 174,371 \cdot (1,761 - 1)] / 100 = 1,761 + 1,327 = 3,088.$$

Из выполненной проверки следует, что  $k = 3,088 > k_{\min} = 1,761$ .

Если в выполненной проверке положить  $\sigma_2 = 1000$  кПа, то

$$k = [1000 \cdot 1,761 + 174,371 \cdot (1,761 - 1)] / 1000 = 1,761 + 0,133 = 1,894.$$

Таким образом, минимальное значение  $k = k_{\min}$ , реализуется при неограниченном возрастании среднего давления в грунте.



М.2.12. Образец грунта испытывается в стабилометре. Прочностные характеристики грунта:  $c=50$  кПа;  $\varphi=16^\circ$ . Соотношение большего главного напряжения к меньшему составляет 3. Определить  $\sigma_1$ , соответствующее разрушению образца.

Для решения задачи воспользуемся законом прочности грунта Кулона–Мора, записанным в виде выражения

$$\frac{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Примем  $k = \sigma_1 / \sigma_2$ . Тогда будем иметь

$$\frac{k \cdot \sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \text{ откуда}$$

$$\sigma_2 = \frac{c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot [\operatorname{tg}^2 (45 + \varphi / 2) - 1]}{k - \operatorname{tg}^2 (45 + \varphi / 2)} = \frac{50 \cdot \operatorname{ctg} 16 \cdot [\operatorname{tg}^2 (45 + 16 / 2) - 1]}{3 - \operatorname{tg}^2 (45 + 16 / 2)} = 107,1 \text{ кПа.}$$

Разрушению образца соответствует  $\sigma_1 = 3 \cdot 107,1 = 321,3$  кПа.

М.2.13. Образец грунта испытывается в стабилометре. Прочностные характеристики грунта:  $c=50$  кПа;  $\varphi=16^\circ$ . Соотношение большего главного напряжения к меньшему составляет 1,5. Определить  $\sigma_1$ , соответствующее разрушению образца.

Для решения задачи воспользуемся законом прочности грунта Кулона–Мора, записанным в виде выражения

$$\frac{\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Примем  $k = \sigma_1 / \sigma_2$ . Тогда будем иметь:

$$\frac{k \cdot \sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \text{ откуда}$$

$$\sigma_2 = \frac{c \cdot \operatorname{ctg} \varphi \cdot [\operatorname{tg}^2 (45 + \varphi / 2) - 1]}{k - \operatorname{tg}^2 (45 + \varphi / 2)} = \frac{50 \cdot \operatorname{ctg} 16 \cdot [\operatorname{tg}^2 (45 + 8) - 1]}{1,5 - \operatorname{tg}^2 (45 + 8)} = -508,4 \text{ кПа.}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что при заданной траектории нагружения в области сжатия образец грунта не может быть разрушен, т.е.  $\sigma_1 \rightarrow \infty$ .

М.2.14. Фазы напряженно-деформированного состояния грунта характеризуются тремя давлениями: 20 кПа; 200 кПа; 600 кПа. Назовите характерные давления фаз напряженно-деформируемого состояния грунта и укажите их значения?

Характерными давлениями являются:

- структурная прочность грунта  $p_{стр.} = 20$  кПа;
- начальное критическое давление  $p_{кр.}^{нач.} = 200$  кПа;
- предельное критическое давление  $p_{кр.}^{пред.} = 600$  кПа.

М.2.15. Грунт находится в фазе уплотнения. Назовите вид зависимости между напряжениями в грунте и его деформациями: а) при нагрузке; б) при разгрузке. Чем отличается модуль деформации грунта от модуля упругости грунта?

а) В фазе уплотнения при нагрузке сумма упругих (восстанавливающихся) и пластических (необратимых) деформаций в грунте линейно зависит от действующих напряжений. Коэффициентом пропорциональности в этой зависимости есть модуль деформации грунта.

б) При разгрузке линейно зависят от напряжений упругие деформации. Коэффициентом пропорциональности в этой зависимости является модуль упругости грунта.

Таким образом, модуль деформации грунта устанавливает зависимость полных деформаций от напряжений, а модуль упругости грунта - зависимость упругих деформаций от напряжений.

М.2.16. Поверхность грунтового потока имеет уклон  $26^\circ 30'$ .

Коэффициент фильтрации грунта  $100 \text{ м/сут}$ . Определить ориентировочное время заполнения водой траншеи шириной  $0,5 \text{ м}$ , пересекающей грунтовой поток и заглубленной ниже уровня грунтовых вод.

Определим градиент гидравлического напора

$$I = (H_{\text{вх.}} - H_{\text{вых.}}) / L = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 26^\circ 30' = 0,5.$$

$$\text{Скорость фильтрации } q = k_f \cdot I = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ м/сут.}$$

Скорость фильтрации  $q$  (м/с) это расход поровой воды через единицу поперечного сечения в единицу времени.

Путь, равный ширине траншеи, грунтовой поток пройдет за время

$$t = L / q = 0,5 / 50 = 0,01 \text{ сут.} = 14,4 \text{ мин.}$$

Это время можно считать ориентировочным временем заполнения траншеи водой.

М.2.17. Могут ли происходить фильтрационные процессы в грунте, если

а)  $I=0,2$ ,  $I_0=0,3$ ; б)  $I=0,3$ ,  $I_0=0,3$ ; в)  $I=0,5$ ,  $I_0=0,1$ ?

Закон фильтрации Дарси с учетом начального градиента гидравлического напора  $I_0$  записывается в виде:  $q = k_f \cdot (I - I_0)$ . Это означает, что фильтрация воды в грунте происходит только в том случае, когда градиент гидравлического напора  $I$  больше начального градиента  $I_0$ . С учетом этого приходим к ответам:

а)  $I < I_0$ , фильтрация происходить не может;

б)  $I = I_0$ , фильтрация происходить не может;

в)  $I > I_0$ , происходит фильтрация воды в грунте.

М.2.18. Каким образом по величине порового давления можно установить завершение фильтрационной консолидации грунта, если начальный градиент гидравлического напора  $I_0=0$ ?

В любой момент времени давление в грунте

$$p = p_z + p_w,$$

где  $p_z$  – давление в скелете грунта (эффективное давление);  $p_w$  – давление в поровой воде (нейтральное давление).

При завершённой фильтрационной консолидации давление в грунте полностью воспринимается его скелетом, т.е.  $p = p_z$ . Из этого следует, что  $p_w = 0$ . Таким образом, признаком завершения фильтрационной консолидации является равенство нулю порового давления.

М.2.19. *Может ли модуль деформации грунта быть а) меньше модуля упругости; б) больше модуля упругости; в) равен модулю упругости?*

Модуль деформации грунта является коэффициентом пропорциональности между напряжением и полной деформацией грунта, равной сумме упругой и пластической деформации:

$$\sigma = (\varepsilon_e + \varepsilon_p) \cdot E.$$

Модуль упругости грунта это коэффициент пропорциональности между напряжением и упругой деформацией грунта:

$$\sigma = \varepsilon_e \cdot E_e.$$

Из приведенных соотношений следует, что

$$(\varepsilon_e + \varepsilon_p) \cdot E = \varepsilon_e \cdot E_e \text{ и } E_e \geq E.$$

Знак равенства в последнем выражении имеет место, если грунт деформируется упруго и его пластическая деформация равна нулю. С учетом изложенного приходим к таким ответам:

- а) модуль деформации грунта может быть меньше модуля упругости;
- б) модуль деформации грунта не может быть больше модуля упругости;
- в) модуль деформации грунта может быть равен модулю упругости.

М.2.20. *Можно ли применить модель линейно деформируемой среды для расчета грунтового основания, если напряжения в грунте больше структурной прочности грунта и меньше начального критического давления?*

Состояние, при котором напряжения в грунте больше структурной прочности и меньше начального критического давления, называется фазой уплотнения. Для этой фазы справедлив закон уплотнения Терцаги и принцип линейной деформируемости, в соответствии с которым полные деформации грунта, равные сумме упругих и пластических деформаций, линейно зависят от напряжений. В связи с этим для расчета грунтовых массивов в фазе уплотнения можно применять модель линейно деформируемой среды.

### Тема М.3. Распределение напряжений в грунтовом массиве от действия внешней нагрузки.

М.3.1. Чему равно нормальное напряжение в точке приложения вертикальной силы к поверхности упругого полупространства?

В соответствии с решением Буссинеска нормальное напряжение в упругом полупространстве при действии на его поверхности сосредоточенной силы  $P$

$$\sigma_z = \frac{3 \cdot P \cdot \cos^3 \beta}{2 \cdot \pi \cdot R^2},$$

где  $\beta$  – угол наклона радиуса – вектора  $R$  точки, в которой определяется напряжение  $\sigma_z$ , к вертикали.

В точке приложения силы  $P$   $\beta = 0$ ,  $\cos \beta = 1$ ,  $R = 0$  и  $\sigma_z \rightarrow \infty$ .

М.3.2. Чему равно нормальное напряжение на поверхности упругого полупространства от действия сосредоточенной вертикальной силы?

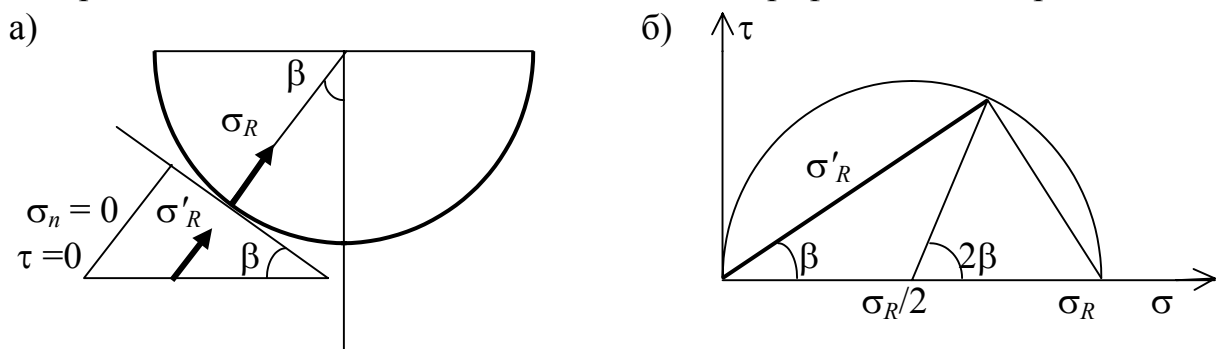
В соответствии с решением Буссинеска нормальное напряжение в упругом полупространстве при действии на его поверхности сосредоточенной силы  $P$

$$\sigma_z = \frac{3 \cdot P \cdot \cos^3 \beta}{2 \cdot \pi \cdot R^2}.$$

На поверхности полупространства  $\beta = 90^\circ$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $R \neq 0$  и  $\sigma_z = 0$ .

М.3.3. Доказать, используя теорию напряженного состояния в точке и гипотезу Буссинеска о равенстве нулю напряжений на площадках, перпендикулярных касательной плоскости к полусфере с центром в точке приложения силы, что главный вектор напряжений на горизонтальной площадке  $\sigma_R'$  равен  $\sigma_R \cdot \cos \beta$ , где  $\sigma_R$  – вектор нормальных напряжений на касательной к полусфере плоскости,  $\beta$  – угол наклона вектора  $\sigma_R$  к вертикали, проходящей через центр полусферы.

Для решения задачи выполняем необходимые графические построения.



На рис. (а) представлена полусфера, напряжения  $\sigma_R$ , действующие на площадке, нормальной к радиусу – вектору полусферы, и напряжения  $\sigma_R'$ , действующие на горизонтальной площадке. Угол между площадками, на которых действуют напряжения  $\sigma_R$  и  $\sigma_R'$ , равен  $\beta$ . В соответствии с гипотезой Буссинеска напряжения на площадке, нормальной к площадке действия напряжения  $\sigma_R$ , равны нулю. По данным рис. (а) на рис. (б) построен круг Мора, отображающий напряженное состояние в точке на полусфере. Из

графических построений круга Мора следует, что  $\sigma'_R = \sigma_R \cdot \cos \beta$ . Этот результат справедлив только в том случае, если  $\sigma_n = 0$  и  $\tau = 0$ , как это показано на рис. (а). В противном случае круг Мора не будет проходить через начало координатной плоскости  $\tau - \sigma$  и полученная формула не будет справедлива.

М.3.4. Поверхность упругого полупространства загружена нагрузкой, распределенной по прямоугольнику. Доказать, что вертикальное напряжение в угловой точке загруженной поверхности на глубине  $z$  равно  $1/4$  напряжения в центральной точке на глубине  $z/2$ .

Вертикальные напряжения в упругом полупространстве при действии нагрузки, распределенной по прямоугольнику, по вертикалям, проходящим через центральную точку и угловую точку загруженной поверхности, вычисляются по формулам:  $\sigma_z = \alpha \cdot p$ ;  $\sigma_{zc} = \alpha_c \cdot p$ , где

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{l \cdot b \cdot z \cdot (l^2 + b^2 + 2 \cdot z^2)}{(l^2 + z^2)(b^2 + z^2)\sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} + \arctg \left( \frac{l \cdot b}{z \sqrt{l^2 + b^2 + z^2}} \right) \right];$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[ \frac{L \cdot B \cdot z (L^2 + B^2 + 2 \cdot z^2)}{(L^2 + z^2)(B^2 + z^2)\sqrt{L^2 + B^2 + z^2}} + \arctg \left( \frac{L \cdot B}{z \sqrt{L^2 + B^2 + z^2}} \right) \right].$$

Подставим в формулу для определения  $\alpha$   $l = L/2$ ;  $b = B/2$  и  $z/2$  вместо  $z$ . Убедимся, что после преобразований выражения в квадратных скобках в формулах для определения  $\alpha$  и  $\alpha_c$  тождественно совпадут. Отсюда следует, что

$$\alpha_{c(z)} = (1/2\pi) \cdot (\pi/2) \alpha_{(z/2)} = \alpha_{(z/2)}/4 \text{ и } \sigma_{zc} = \alpha_{c(z)} \cdot p = (\alpha_{(z/2)}/4) \cdot p = \sigma_{z/2} / 4.$$

М.3.5. На поверхности упругого полупространства действует нагрузка, распределенная по прямоугольнику, интенсивностью 200 кПа. Определить нормальное напряжение на поверхности: а – в центре загруженной поверхности; б – в угловой точке загруженной поверхности.

Для решения задачи воспользуемся формулами, приведенными в ответе на М.3.4. Анализ выражений в квадратных скобках в формулах для вычисления коэффициентов распределения напряжений  $\alpha$  и  $\alpha_c$  при  $z = 0$  приводит к таким результатам: первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю; второе слагаемое равно  $\arctg \infty = \pi/2$ . Отсюда следует, что  $\alpha = 1$ ,  $\alpha_c = 1/4$ . Тогда:

$$\text{а) } \sigma_z = \alpha \cdot p = 1 \cdot 200 = 200 \text{ кПа; } \text{б) } \sigma_{zc} = \alpha_c \cdot p = (1/4) \cdot 200 = 50 \text{ кПа.}$$

М.3.6. На поверхности упругого полупространства действует нагрузка, распределенная по прямоугольнику, интенсивностью 300 кПа. Определить нормальные напряжения на поверхности в центральной точке: а – по формуле  $\sigma_z = \alpha \cdot p$ ; б – методом угловых точек.

Для решения задачи используем результат, полученный в ответе на М.3.5: при  $z = 0$   $\alpha = 1$ ,  $\alpha_c = 1/4$ . Тогда получим для вариантов вычислений:

$$\text{а) } \sigma_z = \alpha \cdot p = 1 \cdot 300 = 300 \text{ кПа;}$$

$$\text{б) } \sigma_z = \sum \sigma_{zc,i} = p \cdot \sum \alpha_{c,i} = 300 \cdot (1/4) \cdot 4 = 300 \text{ кПа.}$$

Здесь учтено, что загруженная площадь при использовании метода угловых точек разделяется на 4 прямоугольника, для которых центральная точка, в которой вычисляется напряжение  $\sigma_z$ , является угловой.

**М.3.7.** *Определить вертикальные напряжения в упругом полупространстве по центральной оси на глубине 1 м от нагрузки на поверхности интенсивностью 200 кПа, распределенной по прямоугольнику с размерами сторон: а - 2×2 м; б - 4×4 м.*

Для решения задачи воспользуемся формулами, приведенными в ответе на М.3.4. Вычисляем коэффициенты распределения напряжений  $\alpha$ :

а)  $l = 2/2 = 1, b = 2/2 = 1, z = 1,$

$$\alpha = \frac{2}{3,14} \left[ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2)}{(1^2 + 1^2)(1^2 + 1^2)\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} + \arctg \left( \frac{1 \cdot 1}{1\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right) \right] = 0,7;$$

б)  $l = 4/2 = 2, b = 4/2 = 2, z = 1,$

$$\alpha = \frac{2}{3,14} \left[ \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 + 2^2 + 2 \cdot 1^2)}{(2^2 + 1^2)(2^2 + 1^2)\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} + \arctg \left( \frac{2 \cdot 2}{1\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right) \right] = 0,93.$$

Вычисляем напряжения на вертикали, проходящей через центр загруженной поверхности, на глубине 1 м:

а)  $\sigma_z = \alpha \cdot p = 0,7 \cdot 200 = 140 \text{ кПа};$

б)  $\sigma_z = \alpha \cdot p = 0,93 \cdot 200 = 186 \text{ кПа}.$

**М.3.8.** *В фундаменте размерами в плане 2×2 м сделан вырез в форме четверти размерами в плане 1×1 м. Через фундамент передается на основание вертикальная нагрузка интенсивностью 300 кПа. Определить вертикальные напряжения в грунтовом массиве на глубине 1 м по вертикали, проходящей через незагруженный угол четверти.*

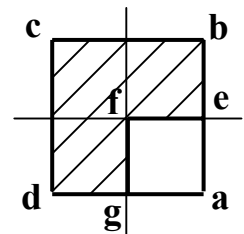
Для решения задачи используем метод угловых точек.

Выполняем необходимые графические построения.

Напряжения в точке (а) вычисляем по формуле:

$$\sigma_a = p \cdot (\alpha_{c(abcd)} - \alpha_{c(aefg)}),$$

где  $\alpha_{c(abcd)}$  и  $\alpha_{c(aefg)}$  – соответственно коэффициенты распределения напряжений в угловых точках прямоугольников **abcd** и **aefg**.



Для вычисления указанных коэффициентов воспользуемся формулами, приведенными в ответе на М.3.4:

Прямоугольник **abcd**:  $L = 2 \text{ м}; B = 2 \text{ м}; z = 1 \text{ м};$

$$\alpha_{c(abcd)} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \left[ \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (2^2 + 2^2 + 2 \cdot 1^2)}{(2^2 + 1^2)(2^2 + 1^2)\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} + \arctg \left( \frac{2 \cdot 2}{1\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \right) \right] = 0,232$$

Прямоугольник **aefg**:  $L = 1 \text{ м}; B = 1 \text{ м}; z = 1 \text{ м};$

$$\alpha_{c(aefg)} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \left[ \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2)}{(1^2 + 1^2)(1^2 + 1^2)\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} + \arctg \left( \frac{1 \cdot 1}{1\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right) \right] = 0,175.$$

Окончательно имеем

$$\sigma_a = p \cdot (\alpha_{c(abcd)} - \alpha_{c(aefg)}) = 300 \cdot (0,232 - 0,175) = 17,1 \text{ кПа}.$$

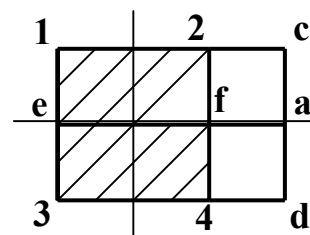
**М.3.9.** Фундамент имеет размеры в плане 2×2 м и передает на основание распределенную нагрузку интенсивностью 200 кПа. Определить напряжения на глубине 1 м от незагруженной поверхности основания в точке (а), отстоящей от середины стороны фундамента на расстоянии 1 м.

Для решения задачи используем метод угловых точек. Выполняем необходимые графические построения.

Напряжения в точке (а) определяются по формуле:

$$\sigma_a = p \cdot (\alpha_{c(ac1e)} - \alpha_{c(ac2f)} + \alpha_{c(ae3d)} - \alpha_{c(af4d)}),$$

где  $\alpha_{c(...)}$  коэффициенты распределения напряжений по вертикалям, проведенным через угловые точки соответствующих прямоугольников, обозначенных в скобках.



Для вычисления коэффициентов  $\alpha_{c(...)}$  используем формулы, приведенные в ответе на М.3.4.

Для прямоугольников **ac1e** и **ae3d** имеем:  $L = 3$  м;  $B = 1$  м;  $z = 1$  м;

$$\alpha_c = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \left[ \frac{3 \cdot 1 \cdot (3^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2)}{(3^2 + 1^2)(1^2 + 1^2)\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} + \arctg\left(\frac{3 \cdot 1}{1\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}}\right) \right] = 0,203.$$

Для прямоугольников **ac2f** и **af4d** имеем:  $L = 1$  м;  $B = 1$  м;  $z = 1$  м;

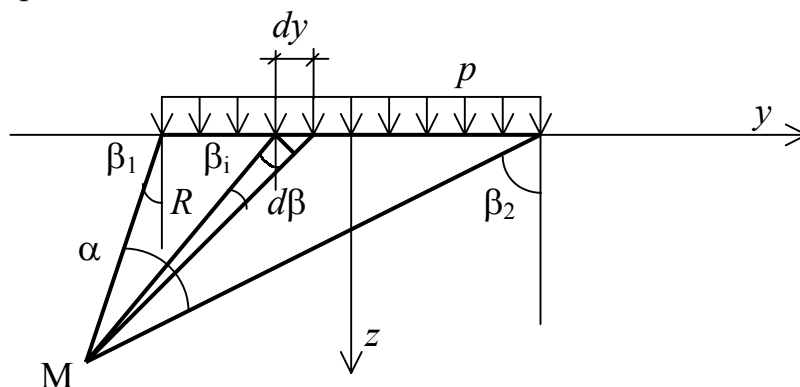
$$\alpha_c = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \left[ \frac{1 \cdot 1 \cdot (1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1^2)}{(1^2 + 1^2)(1^2 + 1^2)\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} + \arctg\left(\frac{1 \cdot 1}{1\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right) \right] = 0,175.$$

Окончательно имеем

$$\sigma_a = 200 \cdot (0,203 - 0,175 + 0,203 - 0,175) = 11,2 \text{ кПа}.$$

**М.3.10.** Доказать, что вертикальные напряжения в грунтовом массиве при плоской деформации определяются по формуле  $\sigma_z = p \cdot (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0)/\pi$ , где  $p$  – интенсивность нагрузки (кН/м<sup>2</sup>);  $\alpha$  – угол видимости загруженной полосы из точки, в которой определяется напряжение  $\sigma_z$ ;  $\beta_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2$ ;  $\beta_1, \beta_2$  – углы, составляемые лучами, образующими угол  $\alpha$ , с вертикалями. При доказательстве принять, что напряжение от действия полосовой (вдоль оси  $x$ ) нагрузки единичной ширины (вдоль оси  $y$ )  $q$  (кН/м) определяется по формуле Фламана  $\sigma_z = 2 \cdot q \cdot z^3 / (\pi \cdot R^4)$ , где  $z$  – глубина от поверхности полуплоскости;  $R$  – радиус-вектор точки, в которой определяется напряжение  $\sigma_z$ .

Для решения задачи выполняем необходимые графические построения в плоскости, нормальной к оси  $x$ .



Решение получаем интегрированием формулы Фламана для единичной полосовой нагрузки. Интенсивность полосовой нагрузки  $dq$  шириной  $dy$  будет:

$$dq = p \cdot dy = p \cdot R \cdot d\beta / \cos\beta_i,$$

где  $\beta_i$  – угол между вертикалью и лучом, проведенным из точки М к площадке  $dy$ ;  $d\beta$  – угол видимости площадки  $dy$ .

С учетом этого будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{2}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{z^3 dq}{R^4} = \frac{2p}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{z^3 R}{R^4 \cos\beta_i} d\beta = \frac{2p}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{R^3 \cos^3\beta_i R}{R^4 \cos\beta_i} d\beta = \frac{2p}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos^2\beta d\beta = \\ &= \frac{2p}{\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta) d\beta = \frac{p}{\pi} \left| \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right|_{\beta_1}^{\beta_2} = \frac{p}{\pi} (\beta_2 - \beta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_2 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_1).\end{aligned}$$

Из геометрических построений следует, что

$$\alpha = \pi - \pi/2 - \beta_1 - \pi/2 + \beta_2 = \beta_2 - \beta_1.$$

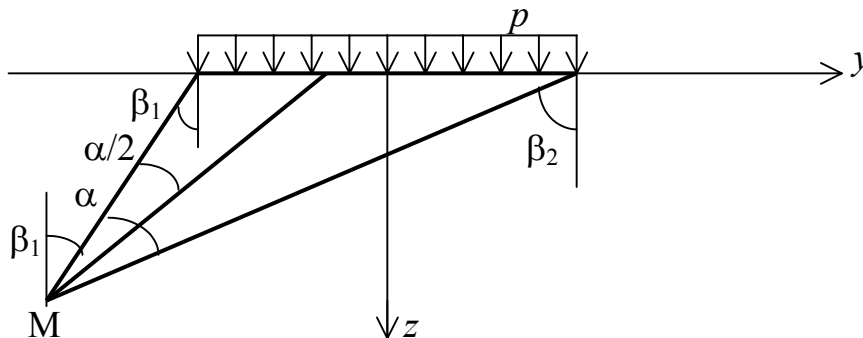
Кроме этого учтем, что  $\sin 2\beta_2 - \sin 2\beta_1 = 2 \sin(\beta_2 - \beta_1) \cdot \cos(\beta_2 + \beta_1)$ .

С учетом того, что по условию задачи  $\beta_2 + \beta_1 = 2\beta_0$ , окончательно будет:

$$\sigma_z = (p/\pi) \cdot (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0).$$

М.3.11. Доказать, что при действии на упругое полупространство полосовой нагрузки вектор большего главного напряжения направлен по биссектрисе угла видимости полосовой нагрузки.

Для решения задачи используем теорию напряженного состояния в точке и решения Фламана для плоской деформации. Выполняем необходимые геометрические построения в плоскости, нормальной к оси, вдоль которой действует полосовая нагрузка.



В соответствии с решением Фламана компоненты тензора напряжений в точке М определяются по формулам:

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0); \quad \sigma_y = \frac{p}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0); \quad \tau_{zy} = \frac{p}{\pi} \sin \alpha \cdot \sin 2\beta_0,$$

где  $\beta_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}.$

В соответствии с теорией напряженного состояния в точке угол наклона  $\varphi$  вектора большего главного напряжения к вектору напряжения  $\sigma_z$  или к оси  $z$  определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = (2\tau_{zy})/(\sigma_z - \sigma_y).$$



Подставляя в последнее выражение формулы Фламана получаем:

$$\sigma_z - \sigma_y = (p/\pi) \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0; \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\beta_0; \quad \varphi = \beta_0.$$

Из геометрических построений следует, что

$$\alpha = \pi - \pi/2 - \beta_1 - \pi/2 + \beta_2 = \beta_2 - \beta_1 \text{ или } \beta_2 = \alpha + \beta_1.$$

Подставляя  $\beta_2$  в выражение для  $\beta_0$ , будем иметь:  $\beta_0 = \varphi = \beta_1 + \alpha/2$ .

Из последнего выражения следует, что вектор большего главного напряжения в точке М направлен по биссектрисе угла видимости полосовой нагрузки из точки М.

М.3.12. Получить формулы для определения главных напряжений при нагружении упругой полуплоскости полосовой нагрузкой. Принять, что угол между вертикальным напряжением  $\sigma_z$  и большим главным напряжением  $\sigma_1$   $\varphi = \beta_0$ ,  $\beta_0 = \beta_1 + \alpha/2$ , где  $\alpha$  – угол видимости полосовой нагрузки;  $\beta_1$  – угол между вертикалью и левым лучом угла видимости  $\alpha$ .

Для решения задачи используем теорию напряженного состояния в точке и решения Фламана для плоской деформации. В соответствии с решением Фламана компоненты тензора напряжений в точке определяются по формулам:

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0); \quad \sigma_y = \frac{p}{\pi} (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0); \quad \tau_{zy} = \frac{p}{\pi} \sin \alpha \cdot \sin 2\beta_0.$$

В соответствии с теорией напряженного состояния главные напряжения определяются через компоненты тензора напряжений по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\tau_{zy}}{\sin 2\varphi}; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\tau_{zy}}{\sin 2\varphi}.$$

Преобразуем выражения для главных напряжений с учетом формул Фламана:

$$\frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} = \frac{p}{\pi} \cdot \alpha; \quad \frac{\tau_{zy}}{\sin 2\varphi} = \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin 2\beta_0}{\sin 2\beta_0} = \frac{p}{\pi} \cdot \sin \alpha,$$

$$\sigma_1 = \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha); \quad \sigma_2 = \frac{p}{\pi} (\alpha - \sin \alpha).$$

Полученные выражения являются окончательными.

М.3.13. Ленточный фундамент шириной 1 м передает на основание давление 200 кПа. Построить эпюру вертикальных напряжений в грунтовом массиве на глубине 1 м. Построение эпюры осуществляется по точкам: в центре фундамента; по краям фундамента; на расстоянии 0,5 м от крайних точек фундамента.

Вертикальные напряжения определяем по формуле Фламана:

$$\sigma_z = \frac{p}{\pi} (\alpha + \sin \alpha \cdot \cos 2\beta_0),$$

$$\text{где } \beta_0 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = \beta_1 + \frac{\alpha}{2} \text{ (см. М.3.11).}$$

Вычисляем угловые координаты расчетных точек в грунтовом массиве. Для этих целей используем графические построения, из ответа на М.3.11.

Точка М с координатами  $y = 0$ ;  $z = 1$  м (центр фундамента):

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = 0,5/1 = 0,5; \alpha/2 = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,565^\circ; \alpha = 53,13^\circ;$$

$\beta_1 = -\alpha/2 = -26,565^\circ$  (поворот вертикали, образующей угол, до совпадения с лучом против хода часовой стрелки);

$\beta_2 = \alpha/2 = 26,565^\circ$  (поворот вертикали, образующей угол, до совпадения с лучом по ходу часовой стрелки);  $\beta_0 = 0$ .

Точка М с координатами  $y = 0,5$  м;  $z = 1$  м (правый край фундамента):

$$\alpha = 45^\circ; \beta_1 = -45^\circ; \beta_2 = 0; \beta_0 = -22,5^\circ.$$

Точка М с координатами  $y = -0,5$  м;  $z = 1$  м (левый край фундамента):

$$\alpha = 45^\circ; \beta_1 = 0; \beta_2 = 45^\circ; \beta_0 = 22,5^\circ.$$

Точка М с координатами  $y = 1$  м;  $z = 1$  м:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = 1,5/1 = 1,5; \beta_1 = -\operatorname{arctg}(1,5) = -56,31^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = 0,5/1 = 0,5; \beta_2 = -\operatorname{arctg}(0,5) = -26,565^\circ;$$

$$\beta_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2 = (-56,31^\circ - 26,565^\circ)/2 = -41,4375^\circ;$$

$$\alpha = \beta_2 - \beta_1 = -26,565^\circ - (-56,31^\circ) = 29,745^\circ.$$

Точка М с координатами  $y = -1$  м;  $z = 1$  м:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = 0,5/1 = 0,5; \beta_1 = \operatorname{arctg}(0,5) = 26,565^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = 1,5/1 = 1,5; \beta_2 = \operatorname{arctg}(1,5) = 56,31^\circ;$$

$$\beta_0 = (\beta_1 + \beta_2)/2 = (56,31^\circ + 26,565^\circ)/2 = 41,4375^\circ;$$

$$\alpha = \beta_2 - \beta_1 = 56,31^\circ - 26,565^\circ = 29,745^\circ.$$

Вычисляем напряжения  $\sigma_z$  в расчетных точках грунтового массива:

1)  $y = -1$  м,  $z = 1$  м,

$$\sigma_z = (200/3,14) \cdot [29,745^\circ \cdot 3,14/180 + \sin 29,745^\circ \cdot \cos (2 \cdot 41,4375^\circ)] = 36,97 \text{ кПа};$$

2)  $y = -0,5$  м,  $z = 1$  м,

$$\sigma_z = (200/3,14) \cdot [45^\circ \cdot 3,14/180 + \sin 45^\circ \cdot \cos (2 \cdot 22,5^\circ)] = 81,85 \text{ кПа};$$

3)  $y = 0$ ,  $z = 1$  м,

$$\sigma_z = (200/3,14) \cdot [53,13^\circ \cdot 3,14/180 + \sin 53,13^\circ \cdot \cos (2 \cdot 0)] = 109,99 \text{ кПа};$$

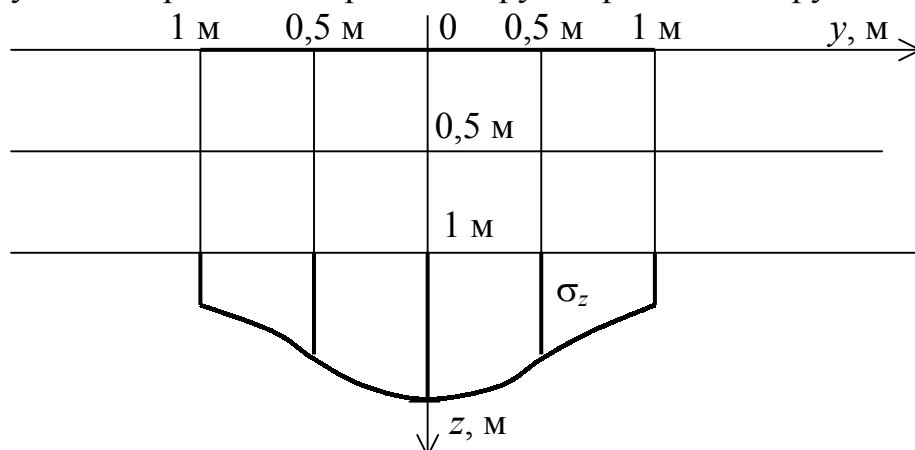
4)  $y = 0,5$  м,  $z = 1$  м,

$$\sigma_z = (200/3,14) \cdot [45^\circ \cdot 3,14/180 + \sin 45^\circ \cdot \cos (-2 \cdot 22,5^\circ)] = 81,85 \text{ кПа};$$

5)  $y = 1$  м,  $z = 1$  м,

$$\sigma_z = (200/3,14) \cdot [29,745^\circ \cdot 3,14/180 + \sin 29,745^\circ \cdot \cos (-2 \cdot 41,4375^\circ)] = 36,97 \text{ кПа}.$$

По результатам расчетов строим эпюру напряжений в грунтовом массиве.



М.3.14. Давление на основание в центре абсолютно жесткого круглого штампа диаметром 1 м составляет 100 кПа. Определить нагрузку на штамп (кН), создающую указанное давление.

Распределение давлений под круглым абсолютно жестким штампом описывается формулой Прандтля:

$$p(r) = \frac{p_m}{2\sqrt{1 - (r/R)^2}},$$

где  $R$  – радиус круглого штампа;  $p_m$  – среднее давление под подошвой штампа.

В центре штампа при  $r = 0$   $p(0) = 0,5 \cdot p_m = 100$  кПа, откуда  $p_m = 200$  кПа. Нагрузка на штамп равна произведению среднего давления на площадь подошвы штампа  $A$ :

$$N = p_m \cdot A = 200 \cdot 3,14 \cdot 0,5^2 = 157 \text{ кН}.$$

М.3.15. Давление на основание под абсолютно жесткой полосой шириной 2 м на расстоянии 0,5 м от центра равно 100 кПа. Определить нагрузку на 1 пог.м полосы, создающую указанное давление.

Давление на основание под абсолютно жесткой полосой вычисляется по формуле:

$$p(y) = \frac{2 \cdot p_m}{\pi \sqrt{1 - (y/b)^2}},$$

где  $y$  – координата точки, в которой определяется давление  $p(y)$ ;

$b$  – половина ширины полосы.

Определяем среднее давление под абсолютно жесткой полосой в функции от  $y$  и  $p(y)$ :

$$p_m = \frac{p(y) \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - (y/b)^2}}{2} = \frac{100 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{1 - (0,5/1)^2}}{2} = 117,75 \text{ кПа}.$$

Нагрузка на погонный метр жесткой полосы составит:

$$q = p_m \cdot 2 \cdot b = 117,75 \cdot 2 = 235,5 \text{ кН/м}.$$

М.3.16. Абсолютно жесткий круглый штамп и абсолютно жесткая полоса передают на основание одинаковые средние давления. Определить, как соотносятся давления в центре указанных штампов.

Распределения давлений под жестким круглым штампом и жесткой полосой описываются формулами:

$$p(r) = \frac{p_m}{2\sqrt{1 - (r/R)^2}}; \quad p(y) = \frac{2 \cdot p_m}{\pi \sqrt{1 - (y/b)^2}},$$

где  $p_m$  – среднее давление под подошвой штампа;

$R$  – радиус круглого штампа;  $b$  – половина ширины полосы;

$r, y$  – координата точки, в которой определяется давление  $p(r)$  или  $p(y)$ .

В центре круглого штампа  $r = 0$ , а в центре полосы  $y = 0$ . С учетом этого  $p(r) = 0,5 \cdot p_m$ , а  $p(y) = (2/\pi) \cdot p_m$ . Отсюда следует, что  $p(y) / p(r) = 4/\pi$ .

М.3.17. Поверхность упругого полупространства загружена распределенным по прямоугольнику  $2 \times 3$  м вертикальным давлением 200 кПа. Средняя осадка поверхности составляет 5 см. Определить осадку абсолютно жесткого штампа размерами в плане  $2 \times 3$  м, загруженного по центру вертикальной силой 1200 кН.

Среднее давление под жестким штампом составляет:

$$p_m = 1200 / (2 \times 3) = 200 \text{ кПа.}$$

При равных давлениях осадка абсолютно жесткого штампа равна средней осадке абсолютно гибкого штампа или, что одно и то же, средней осадке загруженной поверхности. Таким образом, осадка абсолютно жесткого штампа в данном случае равна 5 см.

М.3.18. Доказать, что удельный вес полностью водонасыщенного грунта  $\gamma_{sat}$  равен сумме удельных весов грунта во взвешенном состоянии  $\gamma_{sb}$  и грунтовой воды  $\gamma_w$ .

Введем обозначения:  $\gamma_s, \gamma_d$  – удельный вес частиц грунта и сухого грунта;  $e_0$  – начальный коэффициент пористости;  $W_{sat}$  – полная влагоемкость.

Преобразуем выражение для удельного веса грунта во взвешенном состоянии:

$$\gamma_{sb} = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e_0} = \frac{\gamma_d}{\gamma_s} \cdot (\gamma_s - \gamma_w) = \gamma_d \cdot \left(1 - \frac{\gamma_w}{\gamma_s}\right).$$

Вычислим удельный вес грунта в состоянии полного водонасыщения из выражения для удельного веса сухого грунта

$$\gamma_d = \frac{\gamma}{1 + W}; \quad \gamma_{sat} = \gamma_d (1 + W_{sat}).$$

С учетом того, что

$$W_{sat} = \frac{\gamma_w}{\gamma_s} \cdot e_0 = \frac{\gamma_w}{\gamma_s} \cdot \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1\right) = \frac{\gamma_w}{\gamma_d} - \frac{\gamma_w}{\gamma_s}, \text{ будем иметь:}$$

$$\gamma_{sat} = \gamma_d \cdot \left(1 + \frac{\gamma_w}{\gamma_d} - \frac{\gamma_w}{\gamma_s}\right) = \gamma_d \cdot \left(1 - \frac{\gamma_w}{\gamma_s}\right) + \gamma_w = \gamma_{sb} + \gamma_w.$$

М.3.19. Основание сложено однородным грунтом со следующими характеристиками:  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ ;  $\gamma_s = 27 \text{ кН/м}^3$ ;  $e_0 = 0,6$ . Уровень грунтовых вод находится на 3 м ниже поверхности основания,  $\gamma_w = 10 \text{ кН/м}^3$ . Определить глубину, на которой бытовые давления  $\sigma_{zg} = 70 \text{ кПа}$ .

Определяем удельный вес грунта во взвешенном состоянии:

$$\gamma_{sb} = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1 + e_0} = \frac{27 - 10}{1 + 0,6} = 10,625 \text{ кН/м}^3.$$

Бытовое давление определяем по формуле:

$$\sigma_{zg} = 3 \cdot \gamma + (z - 3) \cdot \gamma_{sb}.$$

Решая последнее уравнение относительно  $z$ , получим:

$$z = (\sigma_{zg} - 3 \cdot \gamma + 3 \cdot \gamma_{sb}) / \gamma_{sb} = (70 - 3 \cdot 18 + 3 \cdot 10,625) / 10,625 = 4,5 \text{ м.}$$

М.3.20. Определить величину дополнительных вертикальных напряжений на глубине 3 м от поверхности планировки под центром, углом и серединой стороны фундамента размером 5×5 м и глубиной заложения 1 м, давление под подошвой фундамента  $P_{cp} = 270$  кПа, удельный вес грунта  $\gamma = 20$  кН/м<sup>3</sup>.

Дополнительные вертикальные напряжения под центром фундамента

$$\sigma_{zp} = P_0 \cdot \alpha$$

где  $\alpha$  – коэффициент, определяемый в зависимости от  $\xi = 2 \cdot z / b$  и  $\eta = l / b$ ;

$z$  – глубина расположения точки под подошвой фундамента;

$l$  и  $b$  – соответственно длина и ширина подошвы фундамента;

$P_0$  – дополнительное давление по подошве фундамента

$$P_0 = P_{cp} - \sigma_{zg0} = 270 - 20 \cdot 1 = 250 \text{ кПа};$$

$\sigma_{zg0} = \gamma \cdot d = 20$  кПа – бытовое давление на уровне подошвы фундамента.

$$\alpha_i = \frac{2}{\pi} \cdot \left( \arctg \frac{\eta}{\xi_i \cdot \sqrt{\xi_i^2 + \eta^2 + 1}} + \frac{\eta \cdot \xi_i \cdot (2 \cdot \xi_i^2 + \eta^2 + 1)}{(1 + \xi_i^2) \cdot (\eta^2 + \xi_i^2) \cdot \sqrt{\xi_i^2 + \eta^2 + 1}} \right).$$

При  $\xi = 2 \cdot 2 / 5 = 0,8$  и  $\eta = l / b = 1$

$$\alpha = \frac{2}{3,14} \left( \arctg \frac{1}{0,8 \cdot \sqrt{0,8^2 + 1^2 + 1}} + \frac{1 \cdot 0,8 \cdot (2 \cdot 0,8^2 + 1^2 + 1)}{(1 + 0,8^2) \cdot (1^2 + 0,8^2) \cdot \sqrt{0,8^2 + 1^2 + 1}} \right) = 0,8$$

$$\sigma_{zp} = P_0 \cdot \alpha = 250 \cdot 0,8 = 200 \text{ кПа}$$

Дополнительное вертикальное напряжение под углом фундамента определяется по формуле:

$$\sigma_{zp,c} = 0,25 \cdot P_0 \cdot \alpha$$

где  $\alpha$  – коэффициент, определяемый в зависимости от  $\xi = z / b$  и  $\eta = l / b$ .

При  $\xi = 2 / 5 = 0,4$  и  $\eta = l / b = 1$

$$\alpha = \frac{2}{3,14} \left( \arctg \frac{1}{0,4 \cdot \sqrt{0,4^2 + 1^2 + 1}} + \frac{1 \cdot 0,4 \cdot (2 \cdot 0,4^2 + 1^2 + 1)}{(1 + 0,4^2)(1^2 + 0,4^2) \cdot \sqrt{0,4^2 + 1^2 + 1}} \right) = 0,96$$

$$\sigma_{zp,c} = 0,25 \cdot P_0 \cdot \alpha = 0,25 \cdot 250 \cdot 0,96 = 60 \text{ кПа}$$

Дополнительное вертикальное напряжение под серединой стороны фундамента определяется методом угловых точек. Для этого площадь фундамента разбиваем на две площади 2,5×5 м и 2,5×5 м. Дополнительное вертикальное напряжение под серединой стороны фундамента определяется как сумма напряжений под углами этих площадей

при  $\xi = 2 / 2,5 = 0,8$  и  $\eta = l / b = 5 / 2,5 = 2$

$$\alpha = \frac{2}{3,14} \left( \arctg \frac{2}{0,8 \cdot \sqrt{0,8^2 + 2^2 + 1}} + \frac{2 \cdot 0,8 \cdot (2 \cdot 0,8^2 + 2^2 + 1)}{(1 + 0,8^2)(2^2 + 0,8^2) \sqrt{0,8^2 + 2^2 + 1}} \right) = 0,869$$

$$\sigma_{zp,l} = 2 \cdot 0,25 \cdot P_0 \cdot \alpha = 2 \cdot 0,25 \cdot 250 \cdot 0,869 = 108,6 \text{ кПа}.$$

М.3.21. Определить дополнительное напряжение на глубине 8 м под центром подошвы близкорасположенных фундаментов с размерами  $2 \times 2$  м и глубиной заложения 2 м. Расстояние между центрами фундаментов по оси  $X$  – 3 м и по оси  $Y$  – 3 м. Нагрузка на каждый фундамент  $N = 1600$  кН. Удельный вес грунта  $\gamma = 20$  кН/м<sup>3</sup>.

Среднее давление под подошвой

$$P = \frac{N}{b \cdot l} + \gamma_{mt} \cdot d = \frac{1600}{2 \cdot 2} + 20 \cdot 2 = 440 \text{ кПа};$$

Дополнительное давление по подошве

$$P_0 = P_{cp} - \sigma_{zg0} = 440 - 20 \cdot 2 = 400 \text{ кПа};$$

при  $\eta = l/b = 1$  и  $\xi = 2 \cdot Z/b = 2 \cdot 8/2 = 8$

$$\alpha = \frac{2}{3,14} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{8 \cdot \sqrt{8^2 + 1^2 + 1}} + \frac{1 \cdot 8 \cdot (2 \cdot 8^2 + 1^2 + 1)}{(1 + 8^2)(1^2 + 8^2) \cdot \sqrt{8^2 + 1^2 + 1}} \right) = 0,029.$$

Напряжение от давления по подошве рассматриваемого фундамента

$$\sigma_{zp} = P_0 \cdot \alpha = 400 \cdot 0,029 = 11,6 \text{ кПа}.$$

Дополнительное вертикальное напряжение от влияющего фундамента определяется методом угловых точек.

$$\text{при } \eta = l/b = 1 \quad \text{и} \quad \xi = Z/b = 8/4 = 2 \quad \alpha_1 = 0,336$$

$$\text{при } \eta = l/b = 2 \approx 1,8 \quad \text{и} \quad \xi = Z/b = 8/2 = 4 \quad \alpha_2 = 0,176$$

$$\text{при } \eta = l/b = 2 \approx 1,8 \quad \text{и} \quad \xi = Z/b = 8/2 = 4 \quad \alpha_3 = 0,176$$

$$\text{при } \eta = l/b = 1 \quad \text{и} \quad \xi = Z/b = 8/2 = 4 \quad \alpha_4 = 0,108$$

$$\sigma_{zp,nf} = \sigma_{zp} + P_0 \cdot 0,25 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) = 11,6 + 400 \cdot 0,25 \cdot 0,094 = 11,6 + 9,4 = 21 \text{ кПа}.$$

Студентам рекомендуется самостоятельно построить расчетную схему метода угловых точек для решения этой задачи и убедиться в правильности использованной расчетной формулы.

*Примечание:* в задачах М.3.20 и М.3.21 использованы формулы для определения коэффициентов распределения напряжений в грунтовом массиве  $\alpha$ , полученные путем преобразования формул из задачи М.3.4 к безразмерным параметрам. Студентам рекомендуется выполнить эти преобразования и убедиться в правильности формул, использованных при решении задач М.3.20 и М.3.21.

## **Тема М.4. Теория предельного напряженного состояния грунтовых массивов.**

М.4.1. Чему равно начальное критическое давление для идеально связного грунта ( $\varphi=0$ )?

Начальное критическое давление вычисляется по формуле:

$$^{нач.} p_{кр.} = \pi / (\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \pi/2) \cdot (\gamma \cdot h + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) + \gamma \cdot h.$$

При  $\varphi = 0$   $\operatorname{ctg} \varphi \rightarrow \infty$  и  $^{нач.} p_{кр.} = \pi \cdot c + \gamma \cdot h$ .

М.4.2. Чему равно начальное критическое давление для песка?

Начальное критическое давление вычисляется по формуле:

$$^{нач.} p_{кр} = \frac{\pi}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \pi/2} \cdot (\gamma \cdot h + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) + \gamma \cdot h.$$

Для песка удельное сцепление  $c = 0$  и

$$^{нач.} p_{кр} = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot h}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \pi/2} + \gamma \cdot h.$$

М.4.3. Чему равно начальное критическое давление для грунта с нулевыми значениями прочностных характеристик?

Начальное критическое давление вычисляется по формуле:

$$^{нач.} p_{кр} = \frac{\pi}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \pi/2} \cdot (\gamma \cdot h + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) + \gamma \cdot h.$$

При  $\varphi = 0$   $\operatorname{ctg} \varphi \rightarrow \infty$  и  $^{нач.} p_{кр.} = \pi \cdot c + \gamma \cdot h$ .

При  $c = 0$   $^{нач.} p_{кр.} = \gamma \cdot h$ .

М.4.4. Начальное критическое давление на грунт составляет 200 кПа, предельное критическое давление 400 кПа. В какой фазе напряженно-деформированного состояния находится грунт, если давление на грунт составляет: а – 150 кПа; б – 250 кПа; в – 450 кПа?

а) в фазе уплотнения, т. к.  $p < ^{нач.} p_{кр.}$ ;

б) в фазе сдвигов, т. к.  $^{нач.} p_{кр} < p < ^{пред.} p_{кр.}$ ;

в) в фазе выпора, т. к.  $p > ^{пред.} p_{кр.}$ .

М.4.5. Можно ли, используя формулу Пузыревского, определить точное значение расчетного сопротивления грунта при действии полосовой нагрузки?

Формула Пузыревского получена из совместного решения уравнений Фламана, описывающих распределение напряжений в упругой среде, и условия предельного равновесия (прочности) Кулона–Мора. Зоны предельного равновесия первоначально возникают в углах полосовой нагрузки на глубине  $z=0$ . Этому состоянию соответствует давление, передаваемое на основание, называемое начальным критическим. Формула Пузыревского позволяет вычислить точное значение начального критического давления при подстановке в нее  $z=0$ . Дальнейшее нагружение приводит к распространению зон предельного равновесия на глубину  $z>0$  и разделению грунтового массива на области упругого и пластического деформирования. При этом для областей пластического деформирования распределение напряжений в грунтовом

массиве не может быть описано с помощью уравнений Фламана. В связи с этим при  $z > 0$  формула Пузыревского становится некорректной. Расчетное сопротивление грунта под полосовой нагрузкой определяется по формуле Пузыревского при подстановке в нее  $z = B/4$ , где  $B$  – ширина полосовой нагрузки. Из приведенного выше обоснования следует, что вычисляемая по формуле Пузыревского величина расчетного сопротивления грунта не является точной.

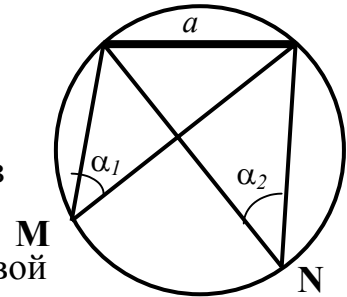
М.4.6. Доказать, что траектория точек с одинаковым значением углов видимости изобразится в виде окружности, проходящей через крайние точки полосовой нагрузки.

Выполняем необходимые графические построения:

В соответствии с теоремой синусов имеем:

$$a / \sin \alpha_1 = R; a / \sin \alpha_2 = R,$$

где  $R$  – радиус описанной окружности, проходящей через крайние точки полосовой нагрузки;  $a$  – длина полосовой нагрузки;  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы видимости полосовой нагрузки из точек  $M$  и  $N$ .



Из приведенных соотношений следует, что  $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$  и  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ .

Следовательно, точки с одинаковыми углами видимости полосовой нагрузки лежат на окружности, проходящей через крайние точки полосовой нагрузки, что и требовалось доказать.

М.4.7. Устойчивая высота стенки траншеи, отрытой в связном грунте, составляет 4 м 28 см. Определить допустимую нагрузку (кПа) на бровку траншеи глубиной 2 м 28 см при условии, что удельный вес грунта  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ .

Устойчивая высота стенки траншеи определяется по формуле:

$$z_0 = (2 \cdot c) / [\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)] - h,$$

где  $h = q/\gamma$ ;  $q$  – величина пригруза (кПа).

Из приведенной формулы получаем выражение для определения

$$h = (2 \cdot c) / [\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)] - z_0.$$

По условиям задачи при  $h = 0$   $z_0 = (2 \cdot c) / [\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)] = 4,28 \text{ м}$ .

Таким образом  $h = 4,28 - z_0$ .

Примем  $z_0$  равным глубине траншеи и получим:

$$h = 4,28 - 2,28 = 2 \text{ м}; q = h \cdot \gamma = 2 \cdot 18 = 36 \text{ кПа}.$$

М.4.8. Чему равна высота устойчивой стенки траншеи, отрытой в песке?

Устойчивая высота стенки траншеи без пригруза на ее бровке определяется по формуле:

$$z_0 = (2 \cdot c) / [\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)],$$

где  $c, \varphi$  и  $\gamma$  – соответственно удельное сцепление, угол внутреннего трения и удельный вес грунта.

Для песка как сыпучего материала удельное сцепление  $c = 0$ . Поэтому высота устойчивой стенки траншеи  $z_0 = 0$ .



М.4.9. Подпорная стена удерживает связный массив грунта. Определить величину пригруза (кПа) на поверхности массива, при котором горизонтальное давление на уровне верха подпорной стены будет равно нулю.

Координата  $z_0$ , соответствующая нулевому значению горизонтального давления на подпорную стену, определяется по формуле:

$$z_0 = \frac{2 \cdot c}{\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)} - h,$$

где  $h = q/\gamma$ ;  $q$  – величина пригруза (кПа).

При  $z_0 = 0$  будем иметь:

$$h = \frac{2 \cdot c}{\gamma \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)}.$$

Таким образом, величина пригруза, соответствующая нулевому горизонтальному давлению, будет равна:

$$q = h \cdot \gamma = \frac{2 \cdot c}{\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2)}.$$

М.4.10. Вертикальная подпорная стена высотой 12 м удерживает массив сыпучего грунта с удельным весом  $20 \text{ кН/м}^3$ . Пригруз на поверхности массива грунта отсутствует. Активное давление на глубине 10 м составляет 66,6 кПа. Определить пассивное давление грунта на глубине 2 м со стороны массива грунта, удерживающую заглубленную часть подпорной стены.

Активное давление в несвязном грунте при отсутствии пригруза на его поверхности определяется по формуле:

$$\sigma_a = \gamma \cdot h \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

Из приведенного выражения определяем угол внутреннего трения грунта:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2) = \sqrt{\frac{\sigma_a}{\gamma \cdot h}} = \sqrt{\frac{66,6}{20 \cdot 10}} = 0,577; \quad \varphi = 2 \cdot (45^\circ - \operatorname{arctg} 0,577) = 30^\circ.$$

Пассивное давление в несвязном грунте при отсутствии пригруза на его поверхности определяется по формуле:

$$\sigma_a = \gamma \cdot h \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) = 20 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + 30^\circ/2) = 120 \text{ кПа}.$$

М.4.11. Подпорная стена со стороны удерживающего массива грунта ( $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ ) заглублена на 3 м. Прочностные характеристики грунта  $c = 20 \text{ кПа}$ ;  $\varphi = 22^\circ$ . Определить величину силы предельного сопротивления грунта, удерживающего подпорную стену.

Со стороны удерживающего массива грунта на подпорную стену действует в предельном состоянии пассивное давление грунта. Сила пассивного давления грунта при отсутствии пригруза на его поверхности определяется по формуле:

$$E_p = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + 2 \cdot H \cdot c \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2),$$

$$E_p = \frac{18 \cdot 3^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45^\circ + 22/2) + 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot \operatorname{tg}(45^\circ + 22/2) = 356 \text{ кН/м стены}.$$

М.4.12. Массив сложен грунтом ( $\gamma=15 \text{ кН/м}^3$ ) с нулевыми значениями прочностных характеристик и удерживается подпорной стеной. Определить активное и пассивное давление грунта на глубине 2 м.

Активное и пассивное давления грунта вычисляются по формулам:

$$\sigma_a = \gamma \cdot (z + h) \cdot \text{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - 2 \cdot c \cdot \text{tg}(45^\circ - \varphi/2) ;$$

$$\sigma_p = \gamma \cdot (z + h) \cdot \text{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + 2 \cdot c \cdot \text{tg}(45^\circ + \varphi/2) .$$

По условиям задачи  $c = 0$  и  $\varphi = 0$ . С учетом этого:

$$\sigma_a = \sigma_p = \gamma \cdot (z + h) .$$

При отсутствии пригруза на поверхности массива ( $h = 0$ )

$$\sigma_a = \sigma_p = \gamma \cdot z = 15 \cdot 2 = 30 \text{ кПа}.$$

М.4.13. Определить коэффициент устойчивости подпорной стены с шириной подошвы 5 м на сдвиг по подошве для момента времени  $t$  в нестабилизированном состоянии основания, если сила активного давления составляет 800 кН/пог. м, сила пассивного давления 300 кН/пог. м, среднее давление по подошве стены 200 кПа. Основание сложено суглинком с прочностными характеристиками:  $c=25 \text{ кПа}$ ;  $\varphi=24^\circ$ . Поровое давление в грунте основания в момент времени  $t$  составляет 100 кПа.

Расчеты выполняются по формулам:

$$\gamma_f = E_{y\partial} / E_{c\partial};$$

$$E_{y\partial} = E_p + A \cdot [(p - p_w) \cdot \text{tg} \varphi + c] = 300 + 5 \cdot 1 \cdot [(200 - 100) \cdot \text{tg} 24^\circ + 25] = 647,61 \text{ кН/м};$$

$$E_{c\partial} = E_a = 800 \text{ кН/м};$$

$$\gamma_f = 647,61 / 800 = 0,81 < 1.$$

Устойчивость подпорной стены на сдвиг по подошве не обеспечена.

М.4.14. Проверить устойчивость подпорной стены на опрокидывание относительно края подошвы фундамента при следующих исходных данных:  $E_a=800 \text{ кН/м}$ ;  $h_a=2,5 \text{ м}$ ;  $E_p=300 \text{ кН/м}$ ;  $h_p=0,6 \text{ м}$ ;  $G=200 \text{ кН/м}$ ;  $l_g=2,5 \text{ м}$ ;  $G_{c\partial}=100 \text{ кН/м}$ ;  $l_{c\partial}=2,0 \text{ м}$ .

Условие устойчивости подпорной стены на опрокидывание имеет вид:

$$M_{y\partial} \geq \gamma_f \cdot M_{опр};$$

$$M_{y\partial} = E_p \cdot h_p + G \cdot l_g + G_{c\partial} \cdot l_{c\partial} = 300 \cdot 0,6 + 200 \cdot 2,5 + 100 \cdot 2 = 880 \text{ кНм/м};$$

$$M_{опр} = E_a \cdot h_a = 800 \cdot 2,5 = 2000 \text{ кНм/м}.$$

$$\text{Коэффициент устойчивости } \gamma_f = M_{y\partial} / M_{опр} = 880 / 2000 = 0,44 < 1.$$

Устойчивость подпорной стены на опрокидывание не обеспечена.

М.4.15. Насыпь, отсыпанная из песка ( $\varphi=30^\circ$ ), имеет в сечении форму равнобедренной трапеции. Высота насыпи 6 м, ширина верхнего основания 3 м, нижнего основания 12 м. Является ли такая насыпь устойчивой.

Определяем угол наклона боковой поверхности насыпи к горизонтальной плоскости (угол откоса):

$$\text{tg } \alpha = 6 / (12/2 - 3/2) = 1,333; \quad \alpha = \text{arctg } 1,333 = 53,13^\circ.$$

Поскольку угол откоса  $\alpha$  больше угла естественного откоса  $\varphi$  насыпь является неустойчивой.

М.4.16. На площадке строительства пробурены три скважины по углам равнобедренного прямоугольного треугольника с размером катета 10 м. У вершины прямого угла грунтовая вода обнаружена на глубине 3 м от поверхности. У вершин острых углов уровень грунтовых вод составляет 5 м от поверхности. Удельный вес грунта  $18 \text{ кН/м}^3$ . Определить величины фильтрационных сил в грунтовом потоке по направлению катетов ( $\text{кН/м}^3$ ).

Фильтрационные силы вычисляем по формулам:

$$\Phi_x = -\gamma \frac{\partial H}{\partial x} = -18 \cdot \frac{(H_{dl} - 5) - (H_{dl} - 3)}{10} = 3,6 \text{ кН/м}^3 \text{ грунта};$$

$$\Phi_y = -\gamma \frac{\partial H}{\partial y} = -18 \cdot \frac{(H_{dl} - 5) - (H_{dl} - 3)}{10} = 3,6 \text{ кН/м}^3 \text{ грунта}.$$

В приведенных формулах  $H_{dl}$  – условная глубина залегания водоупора от дневной поверхности.

М.4.17. Определить удерживающую и сдвигающую силу на элементарном участке круглоцилиндрической поверхности скольжения откоса с длиной горизонтальной проекции 1 м. Высота элементарного объема грунта 6 м. Угол наклона касательной к горизонтали в точке пересечения центральной оси элементарного объема грунта с кругло цилиндрической поверхностью  $30^\circ$ . Характеристики грунта:  $\varphi = 24^\circ$ ;  $c = 25 \text{ кПа}$ ;  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ .

Расчет выполняем для слоя грунта толщиной  $d = 1 \text{ м}$ . Вычисляем вес элементарного объема грунта:  $G_i = h_i \cdot l_{np,i} \cdot d \cdot \gamma_i = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 18 = 108 \text{ кН}$ .

Определяем сдвигающую силу как проекцию силы веса на касательную к круглоцилиндрической поверхности скольжения в точке приложения силы веса:

$$T_{cd,i} = T_i = G_i \cdot \sin \alpha_i = 108 \cdot \sin 30^\circ = 54 \text{ кН}.$$

Определяем удерживающую силу как сумму силы трения, создаваемую нормальной составляющей силы веса на площадке скольжения, и силы сцепления на этой площадке.

Предварительно вычисляем длину элементарной площадки скольжения:

$$l_i = l_{np,i} / \cos \alpha_i = 1 / \cos 30^\circ = 1,155 \text{ м}.$$

Удерживающая сила будет равна:

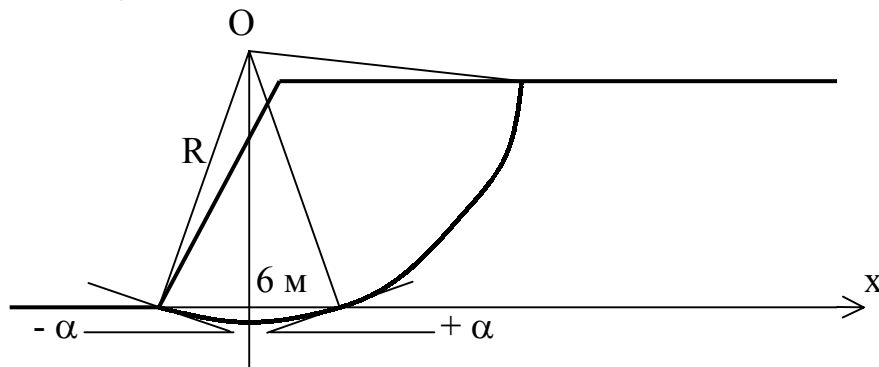
$$T_{y0,i} = G_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \operatorname{tg} \varphi_i + l_i \cdot c_i = 108 \cdot \cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 24^\circ + 1,155 \cdot 25 = 70,52 \text{ кН}.$$

Поскольку  $T_{y0,i} = 70,52 \text{ кН} > T_{cd,i} = 54 \text{ кН}$ , устойчивость откоса на рассматриваемом элементарном участке обеспечена.

М.4.18. Центр кругло цилиндрической поверхности скольжения отстоит по горизонтали от нижней крайней точки откоса на расстоянии 6 м. Определить участки на кругло цилиндрической поверхности скольжения, на которых составляющая собственного веса грунта является: а – сдвигающей; б – удерживающей.

Для ответа на вопрос выполняем необходимые графические построения. Примем начало системы координат в нижней крайней точке откоса. Направим горизонтальную ось  $x$  в сторону откоса. Тогда вертикаль, проходящая через

центр круглоцилиндрической поверхности скольжения, будет пересекать горизонтальную ось в точке с абсциссой  $x = 6$  м.

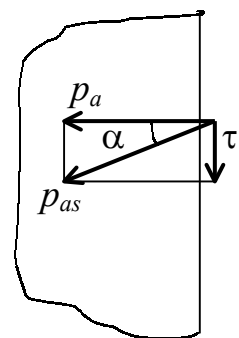


Составляющая собственного веса грунта, участвующая в уравнении предельного равновесия, это проекция силы собственного веса грунта на касательную к круглоцилиндрической поверхности скольжения:  $T_i = G_i \cdot \sin \alpha_i$ . Угол наклона касательной к горизонтали в точке  $i$   $\alpha_i$  считается положительным, если поворот горизонтали до совмещения с касательной осуществляется против хода часовой стрелки. В соответствии с этим правилом угол  $\alpha_i$  слева от вертикали  $x = 6$  м будет отрицательным, а справа положительным. Таким образом, составляющая собственного веса грунта  $T_i$  справа от вертикали  $x = 6$  м будет положительной, а слева отрицательной.

В уравнении предельного равновесия грунтового массива положительная сила  $T_i$  является сдвигающей, а отрицательная – удерживающей.

М.4.19. Поверхность вертикальной подпорной стены, контактирующая с удерживаемым массивом сыпучего грунта, не является идеально гладкой и характеризуется углом внутреннего трения  $\varphi_0 = 30^\circ$ . Вектор полного активного давления  $p_{as}$  равен 577,3 кН/пог. м. Определить нормальную составляющую вектора активного давления  $p_a$ .

На абсолютно гладкой поверхности вертикальной подпорной стены в предельном состоянии нормальное напряжение равно активному давлению грунта  $p_a$ . Если указанная поверхность не является идеально гладкой, на ней в предельном состоянии развиваются удерживающие касательные напряжения  $\tau$ , равные произведению нормальных напряжений  $p_a$  на коэффициент трения. В результате этого вектор полного активного давления  $p_{as}$  отклоняется от нормали на угол  $\alpha$  как это показано на схеме. Коэффициент трения по вертикальной поверхности подпорной стены равен  $\tan \varphi_0$ . Из приведенной схемы следует, что



$$\tan \alpha = \tau / p_a = p_a \cdot \tan \varphi_0 / p_a = \tan \varphi_0, \text{ откуда } \alpha = \varphi_0 = 30^\circ.$$

Из векторной диаграммы, изображенной на схеме, определяем нормальную составляющую вектора активного давления:

$$p_a = p_{as} \cdot \cos \alpha = 577,3 \cdot \cos 30^\circ = 500 \text{ кН/м.}$$

М.4.20. Определить оползневое давление в пристенном оползне (кН/пог. м) при следующих исходных данных. Оползневое давление в начале элементарной призмы равно 600 кН/пог. м. Длина элементарной призмы  $l_i = 6$  м, вес 1000 кН/пог. м. Прочностные характеристики грунта:  $\varphi = 20^\circ$ ;  $c = 20$  кПа. Угол наклона плоскости скольжения  $\alpha_i = 30^\circ$ .

Выполним необходимые графические построения. Для определения оползневого давления  $E_i$  приведем действующие на выделенный элемент оползня силы к двум силам: проекциям на оси  $x$  и  $y$ .

$X = E_i \cdot \cos \varphi_i - E_{i-1} \cdot \cos \varphi_{i-1} = E_i \cdot \cos 20^\circ - 600 \cdot \cos 20^\circ$ , откуда  $X = 0,94E_i - 563,8$ .

$Y = G_i - E_i \cdot \sin \varphi_i + E_{i-1} \cdot \sin \varphi_{i-1} = 1000 - E_i \cdot \sin 20^\circ + 600 \cdot \sin 20^\circ$ , откуда  $Y = 1205,2 - 0,342 \cdot E_i$ .

Систему сил  $X$  и  $Y$  приводим к системе сил  $N$  и  $T$ , являющихся проекциями на нормаль к плоскости скольжения и на плоскость скольжения.

$N = Y \cdot \cos \alpha_i + X \cdot \sin \alpha_i = (1205,2 - 0,342 \cdot E_i) \cdot \cos 30^\circ + (0,94 \cdot E_i - 563,8) \cdot \sin 30^\circ = 761,8 + 0,174 \cdot E_i$ .

$T = Y \cdot \sin \alpha_i - X \cdot \cos \alpha_i = (1205,2 - 0,342 \cdot E_i) \cdot \sin 30^\circ - (0,94 \cdot E_i - 563,8) \cdot \cos 30^\circ = 1090,9 - 0,985 \cdot E_i$ .

Уравнение предельного равновесия имеет вид:

$T = N \cdot \operatorname{tg} \varphi_i + c_i \cdot l_i / \cos \alpha_i$  или  $1090,9 - 0,985 \cdot E_i = (761,8 + 0,174 \cdot E_i) \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 20 \cdot 6 / \cos 30^\circ$ .

Из полученного уравнения находим величину оползневого давления:  $1,048 \cdot E_i = 675,1$  или  $E_i = 644,2$  кН/м. Возрастание оползневого давления свидетельствует о том, что приращение сдвигающих сил от веса массива грунта превосходит приращение удерживающих сил за счет трения и сцепления грунта по плоскости скольжения. Выделенный элемент массива грунта (оползня) является неустойчивым, так как для его равновесия необходимо приложить силу  $E_i > 0$ .

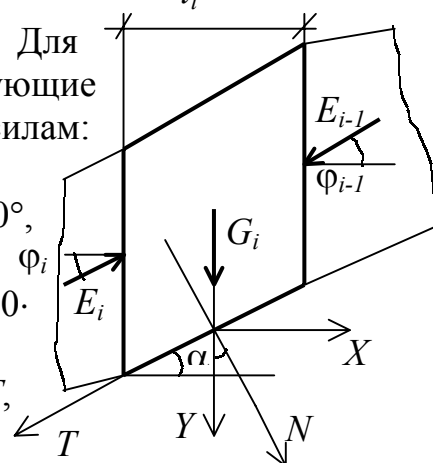
М.4.21. Определить предельную высоту вертикального откоса котлована. Грунт: песок, угол внутреннего трения  $\varphi = 33^\circ$ , удельное сцепление  $C = 2$  кПа, удельный вес грунта  $\gamma = 19,7$  кН/м<sup>3</sup>.

Предельная высота вертикального откоса определяется по формуле

$$h_0 = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\gamma \cdot (1 - \sin \varphi)} = \frac{2 \cdot c}{\gamma \cdot \operatorname{tg}(45 - \varphi/2)} = \frac{2 \cdot 2}{19,7 \cdot \operatorname{tg} 28,5} = 0,37 \text{ м.}$$

М.4.22. Определить, будет ли устойчив котлован с вертикальной стенкой высотой 4 м. Грунт: суглинок, угол внутреннего трения  $\varphi = 16^\circ$ , удельное сцепление  $C = 30$  кПа, удельный вес грунта  $\gamma = 20$  кН/м<sup>3</sup>, коэффициент устойчивости  $K = 1,2$ .

Предельная высота вертикального откоса определяется по формуле:



$$h_0 = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{\gamma \cdot (1 - \sin \varphi)} = \frac{2 \cdot c}{\gamma \cdot \operatorname{tg}(45 - \varphi / 2)} = \frac{2 \cdot 30}{20 \cdot \operatorname{tg} 37} = 3,98 \text{ м},$$

$$h = 4 \text{ м} > h_0 / K = 3,98 / 1,2 = 3,32 \text{ м}.$$

Вертикальная стенка котлована высотой 4 м не устойчива.

М.4.23. Определить равнодействующую давлений грунта на стену подвала глубиной 3 м для следующих условий: пригрузка на уровне планировки 20 кПа, грунт обратной засыпки: удельный вес  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ , угол внутреннего трения  $\varphi = 16^\circ$ , удельное сцепление  $c=0$ . Фундамент заглублен в грунт ниже пола подвала на 0,68 м.

Действие пригрузки на уровне планировки приводим к действию слоя грунта эквивалентной высоты

$$h_{\text{экв}} = \frac{q}{\gamma} = \frac{20}{18} = 1,1 \text{ м},$$

боковое давление на уровне планировки:

$$\sigma_{3,П} = 18 \cdot 1,1 \cdot \operatorname{tg}^2(45 - 16/2) = 11,24 \text{ кПа}$$

боковое давление на уровне подошвы фундамента:

$$\sigma_{3,\Phi} = 18 \cdot (1,1 + 3,68) \cdot \operatorname{tg}^2(45 - 16/2) = 48,86 \text{ кПа},$$

равнодействующая активного давления:

$$E_a = \frac{(\sigma_{3,П} + \sigma_{3,\Phi}) \cdot H}{2} = \frac{(11,24 + 48,86) \cdot 3,68}{2} = 110,58 \text{ кН};$$

равнодействующая пассивного давления:

$$E_p = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45 + \varphi/2) = \frac{18 \cdot 0,68^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45 + 16/2) = 7,3 \text{ кН}.$$

М.4.24. Определить будет ли устойчива массивная подпорная стенка шириной 0,6 м из тяжелого бетона  $\gamma = 24 \text{ кН/м}^3$ , заглубленная в грунт на 1 м и поддерживающая вертикальный откос высотой 4 м при следующих условиях: пригрузка на уровне планировки 10 кПа, грунт: удельный вес  $\gamma = 19 \text{ кН/м}^3$ , угол внутреннего трения  $\varphi = 24^\circ$ , удельное сцепление  $C = 10 \text{ кПа}$ . Коэффициент устойчивости  $k = 1,2$ .

Действие пригрузки на уровне планировки приводим к действию слоя грунта эквивалентной высоты

$$h_{\text{экв}} = \frac{q}{\gamma} = \frac{10}{19} = 0,53 \text{ м},$$

боковое давление на уровне подошвы подпорной стенки:

$$\sigma_3^{\max} = 19 \cdot (0,53 + 5) \cdot \operatorname{tg}^2(45 - 24/2) - 2 \cdot 10 \cdot \operatorname{tg}(45 - 24/2) = 44,31 - 12,99 = 31,32$$

кПа,

$$h_c = \frac{2 \cdot c}{\gamma \cdot \operatorname{tg}(45 - \varphi/2)} - h_{\text{экв}} = \frac{2 \cdot 10}{19 \cdot 0,65} - 0,53 = 1,09 \text{ м}.$$

Равнодействующая активного давления:

$$E_a = \frac{\sigma_3^{\max} \cdot (H - h_c)}{2} = \frac{31,32 \cdot (5 - 1,09)}{2} = 61,23 \text{ кН},$$

$$e_a = \frac{5 - 1,09}{3} = 1,3 \text{ м}.$$

Равнодействующая пассивного давления:

$$E_p = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45 + \varphi / 2) + 2 \cdot c \cdot H \cdot \operatorname{tg}(45 + \varphi / 2) = \frac{19 \cdot 1^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(45 + 24 / 2) + 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}(45 + 24 / 2) = 22,52 + 30,80 = 53,53 \text{ кН}.$$

$$e_{p(22,52)} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ м}; \quad e_{p(30,80)} = \frac{1}{2} = 0,50 \text{ м}.$$

Нагрузка от собственного веса

$$G = b \cdot h \cdot \gamma_b = 0,6 \cdot 5 \cdot 24 = 72 \text{ кН}.$$

Определяем фактический коэффициент устойчивости относительно точки М

$$k = \frac{\sum M_{sr}}{\sum M_{sa}} = \frac{22,52 \cdot 0,33 + 30,80 \cdot 0,5 + 72 \cdot 0,3}{61,23 \cdot 1,3} = \frac{7,5 + 15,4 + 21,6}{79,6} = 0,56$$

Фактический коэффициент устойчивости меньше требуемого  $k = 1,2$ , значит стенка неустойчива.

*М.4.25. Найти глубину развития зон сдвигов под подошвой ленточного фундамента шириной  $b = 2$  м при среднем давлении по подошве  $P = 250$  кПа. Глубина заложения фундамента 1 м. Грунт основания однородный со следующими характеристиками: угол внутреннего трения  $\varphi = 20^\circ$ ; удельное сцепление  $c = 24$  кПа; удельный вес грунта  $\gamma = 19,5$  кН/м<sup>3</sup>. Допустимо ли полученное значение?*

Глубину развития зон сдвигов под подошвой фундамента можно определить из формулы Пузыревского

$$p_{кр} = \frac{\pi}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \pi/2} (\gamma \cdot z + \gamma \cdot h + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) + \gamma \cdot h$$

Приводим формулу к следующему виду

$$z = \frac{(P - \gamma \cdot h) \cdot (\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \pi/2)}{\pi \cdot \gamma} - h - \frac{c \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{\gamma} = \frac{(250 - 19,5 \cdot 1) \cdot (2,75 + 0,35 - 1,57)}{3,14 \cdot 19,5} - 1 - \frac{24 \cdot 2,75}{19,5} = 1,37 \text{ м}$$

Здесь угол  $\varphi$  подставляется в радианах.

Полученное значение превышает значение, допускаемое нормами

$$z_{max} = 0,25 \cdot b = 0,25 \cdot 2 = 0,5 \text{ м}.$$

### Тема М.5. Расчетные модели грунтовых оснований. Расчет осадок оснований. Филтратационная консолидация и ползучесть грунтов.

*М.5.1. При нагрузке основания штампом с размерами в плане 2×2 м при давлении по подошве 300 кПа осадка штампа составила 5 см. При этом на расстоянии 1 м от границы штампа осадка поверхности основания составила 1 см. При полной разгрузке штампа его остаточная осадка составила 2 см. Классифицировать модель основания и определить модуль упругости и модуль деформации основания, если основание однородно,  $R=350$  кПа,  $\nu=0,30$ ,  $\omega_z=1,06$ .*

Поскольку осадка основания наблюдается за пределами нагруженной поверхности, модель основания классифицируется как модель общих деформаций. Поскольку при разгрузке основания имеет место остаточная деформация, модель основания классифицируется как неупругая. При давлениях, не превышающих расчетного сопротивления грунта, допускается использовать принцип линейной деформируемости основания. Таким образом это линейная неупругая модель общих деформаций.

Осадку основания для данной модели вычисляется по формуле Баркана:

$$S = \frac{p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{\omega_z \cdot E}; \quad S_e = \frac{p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{\omega_z \cdot E_e},$$

где  $S$  и  $S_e$  – соответственно полная и упругая осадка основания;

$E$  и  $E_e$  – соответственно модуль деформации и модуль упругости грунта.

Из приведенных формул определяем: модуль деформации грунта

$$E = \frac{p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{\omega_z \cdot S} = \frac{300 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} \cdot (1 - 0,3^2)}{1,06 \cdot 0,05} = 10302 \text{ кПа} = 10,3 \text{ МПа};$$

модуль упругости

$$E_e = \frac{p \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{\omega_z \cdot S_e} = \frac{300 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} \cdot (1 - 0,3^2)}{1,06 \cdot (0,05 - 0,02)} = 17170 \text{ кПа} = 17,2 \text{ МПа}.$$

Модуль упругости грунта всегда больше или равен модулю деформации.

*М.5.2. При нагрузке основания штампом с размерами в плане 2×2 м при давлении по подошве 300 кПа осадка штампа составила 5 см. При этом за пределами штампа осадки отсутствовали. При полной разгрузке штампа его остаточная осадка составила 5 см. Классифицировать модель основания и определить коэффициент жесткости при равномерном сжатии, если основание однородно и  $R=350$  кПа.*

Отсутствие осадки основания за пределами нагруженной поверхности свидетельствует о том, что это модель местных деформаций. Поскольку при разгрузке основания имеет место остаточная деформация, модель основания классифицируется как неупругая. При давлениях, не превышающих расчетного сопротивления грунта, допускается использовать принцип линейной деформируемости основания. Таким образом это линейная неупругая модель местных деформаций. Поскольку при разгрузке основания полностью



отсутствуют упругие деформации, это модель Фусса. Коэффициент жесткости (постели) основания при равномерном сжатии определяется по формуле:

$$C_z = p/S = 300/0,05 = 6000 \text{ кН/м}^3.$$

М.5.3. Основание загружено давлением 300 кПа, распределенным по прямоугольнику с размерами сторон 2×2 м. Модуль деформации грунта 10 МПа,  $\nu = 0,3$ . Определить осадку в центре прямоугольника и на расстоянии 3 м от его центра вдоль оси прямоугольника.

Осадки вычисляем для линейно деформируемого полупространства по формуле:

$$S(x, y) = \frac{p \cdot (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E} \cdot \left[ (x + a) \cdot \ln \frac{\sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2} + (y + b)}{\sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2} + (y - b)} - (x - a) \times \right. \\ \times \ln \frac{\sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2} + (y + b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} + (y - b)} + (y + b) \cdot \ln \frac{\sqrt{(x + a)^2 + (y + b)^2} + (x + a)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y + b)^2} + (x - a)} - \\ \left. - (y - b) \cdot \ln \frac{\sqrt{(x + a)^2 + (y - b)^2} + (x + a)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} + (x - a)} \right].$$

Входящие в формулу величины  $a$  и  $b$  являются половинами размеров загруженного прямоугольника. В центре прямоугольника  $x = 0$  и  $y = 0$ . С учетом этого

$$S(0, 0) = \frac{300(1 - 0,3^2)}{3,14 \cdot 10000} \cdot \left[ (0 + 1) \cdot \ln \frac{\sqrt{(0 + 1)^2 + (0 + 1)^2} + (0 + 1)}{\sqrt{(0 + 1)^2 + (0 - 1)^2} + (0 - 1)} - (0 - 1) \times \right. \\ \times \ln \frac{\sqrt{(0 - 1)^2 + (0 + 1)^2} + (0 + 1)}{\sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2} + (0 - 1)} + (0 + 1) \cdot \ln \frac{\sqrt{(0 + 1)^2 + (0 + 1)^2} + (0 + 1)}{\sqrt{(0 - 1)^2 + (0 + 1)^2} + (0 - 1)} - \\ \left. - (0 - 1) \cdot \ln \frac{\sqrt{(0 + 1)^2 + (0 - 1)^2} + (0 + 1)}{\sqrt{(0 - 1)^2 + (0 - 1)^2} + (0 - 1)} \right] = 0,061 \text{ м} = 6,1 \text{ см}.$$

В точке на расстоянии 3 м от центра загруженного прямоугольника по направлению центральной оси  $x = 3$ ,  $y = 0$ . С учетом этого

$$S(3, 0) = \frac{300(1 - 0,3^2)}{3,14 \cdot 10000} \cdot \left[ (3 + 1) \cdot \ln \frac{\sqrt{(3 + 1)^2 + (0 + 1)^2} + (0 + 1)}{\sqrt{(3 + 1)^2 + (0 - 1)^2} + (0 - 1)} - (3 - 1) \times \right. \\ \times \ln \frac{\sqrt{(3 - 1)^2 + (0 + 1)^2} + (0 + 1)}{\sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - 1)^2} + (0 - 1)} + (0 + 1) \cdot \ln \frac{\sqrt{(3 + 1)^2 + (0 + 1)^2} + (3 + 1)}{\sqrt{(3 - 1)^2 + (0 + 1)^2} + (3 - 1)} - \\ \left. - (0 - 1) \cdot \ln \frac{\sqrt{(3 + 1)^2 + (0 - 1)^2} + (3 + 1)}{\sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - 1)^2} + (3 - 1)} \right] = 0,0118 \text{ м} = 1,18 \text{ см}.$$

Осадка основания на незагруженной поверхности составила примерно 20 % от осадки в центре.

М.5.4. При нагружении основания штампом при среднем давлении 100 кПа получены следующие результаты: восстанавливаемая часть осадки 3 мм; осадка после полной разгрузки 7 мм. Определить полную осадку штампа при среднем давлении 200 кПа, если соблюдается принцип линейной деформируемости основания.

По условиям задачи при давлении 100 кПа упругая осадка составляет  $S_e = 0,003$  м, пластическая осадка  $S_p = 0,007$  м.

Полная осадка равна:  $S = S_e + S_p = 0,01$  м.

Коэффициент жесткости основания при равномерном сжатии равен:

$$C_z = p/S = 100/0,01 = 10000 \text{ кН/м}^3.$$

Полная осадка при давлении 200 кПа будет равна:

$$S = p / C_z = 200/10000 = 0,02 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

М.5.5. Однородный слой грунта толщиной 1 м испытывает однородное сжатие от планировки подсыпки интенсивностью 100 кПа. Коэффициент пористости грунта 0,8; коэффициент сжимаемости  $0,00018 \text{ м}^2/\text{кН}$ ; коэффициент Пуассона 0,3. Определить осадку слоя грунта и модуль деформации грунта.

Определяем коэффициент относительной сжимаемости грунта:

$$m_v = m/(1 + e_0) = 0,00018/(1 + 0,8) = 0,0001 \text{ м}^2/\text{кН}.$$

По условиям задачи напряженным состоянием грунта является одномерное компрессионное сжатие. Для этого случая осадка грунта в соответствии с законом уплотнения Терцаги определяется по формуле:

$$S = m_v \cdot \sigma_z \cdot h = 0,0001 \cdot 100 \cdot 1 = 0,01 \text{ м} = 1 \text{ см}.$$

Вычисляем коэффициент вида напряженного состояния

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot \nu^2}{1 - \nu} = 1 - \frac{2 \cdot 0,3^2}{1 - 0,3} = 0,743.$$

Осадка грунта при одномерном компрессионном сжатии определяется в соответствии с законом Гука по формуле:

$$S = \beta \cdot \sigma_z \cdot h / E, \text{ откуда } E = \beta \cdot \sigma_z \cdot h / S = 0,743 \cdot 100 \cdot 1 / 0,01 = 7430 \text{ кПа} = 7,43 \text{ МПа}.$$

М.5.6. Деформационные характеристики грунта определяются путем испытания его жестким штампом. Коэффициенты формы подошвы жесткого штампа составляют:  $\omega_z = 1,06$ ;  $\omega_\varphi = 1,98$ ;  $\omega_x = 0,53$ . Коэффициент Пуассона грунта 0,3. Определить коэффициент жесткости основания при неравномерном сжатии и равномерном сдвиге, если коэффициент жесткости при равномерном сжатии составляет  $10000 \text{ кН/м}^3$ .

Коэффициент жесткости при равномерном сжатии определяется по формуле:

$$C_z = \frac{\omega_z \cdot E}{\sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}, \text{ откуда модуль деформации грунта будет равен}$$

$$E = \frac{C_z \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)}{\omega_z} = \frac{10000 \cdot \sqrt{A} \cdot (1 - 0,3^2)}{1,06} = 8584,9 \cdot \sqrt{A}.$$

Подставляя в формулы для определения коэффициентов жесткости при неравномерном сжатии и равномерном сдвиге выражение для модуля деформации грунта, получим:

– коэффициент жесткости при неравномерном сжатии

$$C_{\varphi} = \frac{\omega_{\varphi} \cdot E}{\sqrt{A} \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{1,98 \cdot 8584,9}{(1 - 0,3^2)} = 15468,3 \text{ кН/м}^3;$$

– коэффициент жесткости при равномерном сдвиге

$$C_x = \frac{\omega_x \cdot E}{\sqrt{A} \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - \nu \omega_x)} = \frac{0,53 \cdot 8584,9}{(1 + 0,3) \cdot (1 - 0,3 \cdot 0,53)} = 4161,7 \text{ кН/м}^3.$$

М.5.7. Осадка фундамента вычисляется методом послойного суммирования. Толщина элементарного слоя принята 1 м. Модуль деформации грунта 10 МПа, коэффициент Пуассона 0,3. Осадка  $i$ -го слоя грунта при давлении на кровле 75 кПа составляет 0,005 м. Определить давление в основании  $i$ -го слоя грунта.

Осадка  $i$ -го слоя грунта вычисляется по формуле:

$$S_i = \beta \cdot \sigma_{zp,i} \cdot h_i / E_i, \text{ откуда } \sigma_{zp,i} = S_i \cdot E_i / (\beta \cdot h_i) = 0,005 \cdot 10000 / (0,8 \cdot 1) = 62,5 \text{ кПа},$$

где  $\beta$  – коэффициент вида напряженного состояния принимается равным 0,8;

$\sigma_{zp,i}$  – дополнительное давление в центре  $i$ -го слоя грунта, равное полусумме дополнительных давлений на кровле  $\sigma_{zp,i(\kappa)}$  и в основании  $\sigma_{zp,i(o)}$  этого слоя.

Из выражения для  $\sigma_{zp,i} = (\sigma_{zp,i(\kappa)} + \sigma_{zp,i(o)})/2$  получаем:

$$\sigma_{zp,i(o)} = 2 \cdot \sigma_{zp,i} - \sigma_{zp,i(\kappa)} = 2 \cdot 62,5 - 100 = 50 \text{ кПа}.$$

М.5.8. Осадка фундамента вычисляется методом послойного суммирования. Основание однородно. Модуль деформации грунта 10 МПа, коэффициент пористости 0,8, удельный вес грунта 18 кН/м<sup>3</sup>, удельный вес частиц грунта 27 кН/м<sup>3</sup>, удельный вес воды 10 кН/м<sup>3</sup>. Глубина заложения фундамента 3 м. Дополнительное давление в центре  $i$ -го слоя грунта толщиной 1 м на глубине 10 м от подошвы фундамента 40 кПа. Определить осадку  $i$ -го слоя грунта, если: а – уровень грунтовых вод находится на глубине 15 м от поверхности основания; б – то же, на уровне подошвы фундамента.

а) Расчетный слой грунта находится на глубине 13 м (3 м + 10 м) от поверхности основания. В связи с этим бытовое давление рассчитывается по удельному весу грунта  $\gamma = 18 \text{ кН/м}^3$ :

$$\sigma_{zg,i} = \gamma \cdot (z_i + d) = 18 \cdot (10 + 3) = 234 \text{ кПа}.$$

Проверяем условие границы сжимаемой толщи  $\sigma_{zp,i} \geq 0,2\sigma_{zg,i}$ . Имеем:

$$\sigma_{zp,i} = 40 \text{ кПа} < 0,2\sigma_{zg,i} = 0,2 \cdot 234 = 46,8 \text{ кПа}.$$

Таким образом  $i$ -ый слой грунта находится за пределами сжимаемой толщи и его осадка  $S_i = 0$ .

б) Поскольку грунт от подошвы фундамента до расчетного слоя находится во взвешенном состоянии, определяем удельный вес грунта во взвешенном состоянии:

$$\gamma_{sb} = (\gamma_s - \gamma_w)/(1 + e_0) = (27 - 10)/(1 + 0,8) = 9,44 \text{ кН/м}^3.$$

Вычисляем бытовое давление на уровне центра  $i$ -го слоя грунта:

$$\sigma_{zg,i} = \gamma_{sb} \cdot z_i + \gamma \cdot d = 9,44 \cdot 10 + 18 \cdot 3 = 148,4 \text{ кПа}.$$

Проверяем условие границы сжимаемой толщи  $\sigma_{zp,i} \geq 0,2\sigma_{zg,i}$ . Имеем:

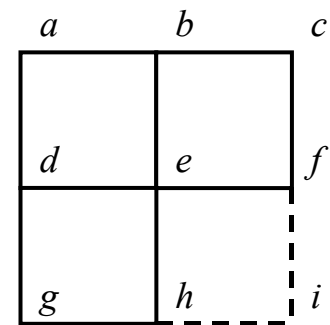
$$\sigma_{zp,i} = 40 \text{ кПа} > 0,2\sigma_{zg,i} = 0,2 \cdot 148,4 = 29,68 \text{ кПа}.$$

Расчетный слой грунта находится в сжимаемой толще. Осадку расчетного слоя грунта вычисляем по формуле:

$$S_i = \beta \cdot \sigma_{zp,i} \cdot h_i / E_i = 0,8 \cdot 40 \cdot 1 / 10000 = 0,0032 \text{ м} = 0,32 \text{ см}.$$

В последней формуле коэффициент вида напряженного состояния  $\beta$  принимается равным 0,8.

М.5.9. Три квадратных фундамента смонтированы без зазоров так, что образуют в плане прямоугольный угол. Основание однородно,  $E=5 \text{ МПа}$ . Нагрузки на фундаменты одинаковы. Дополнительные давления по центральным осям фундаментов составляют (без учета их взаимного влияния): при  $z=0,4 \text{ м}$  480 кПа; при  $z=0,8 \text{ м}$  400 кПа. Определить осадку слоя грунта толщиной 0,5 м в основании на глубине среднего сечения от подошвы фундаментов 1,6 м по вертикали, проходящей через незагруженный угол фигуры, дополняющей план фундаментов до квадрата.



Для решения задачи используем метод угловых точек и известный результат из теории распределения давлений по вертикалям, проходящим через центральное сечение фундамента и угловую точку. Выполняем необходимые графические построения. Определяем напряжение по вертикали, проходящей через точку  $e$ , на глубине 0,8 м, от нагрузки, действующей по прямоугольнику  $acig$ . Для этого используем информацию о напряжениях по вертикалям, проведенным через центр фундаментов, на глубине 0,4 м. Используя метод угловых точек, будем иметь:

$$\sigma_{0,8(e)} = 4 \cdot [(1/4) \cdot \sigma_{0,4(0)}] = 4 \cdot [(1/4) \cdot 480] = 480 \text{ кПа}.$$

Определяем напряжение по вертикали, проходящей через точку  $i$ , на глубине 1,6 м, от нагрузки, действующей по прямоугольнику  $acig$ . Для этого используем информацию о напряжении по вертикали, проведенной через центр фиктивного фундамента (точка  $e$ ), на глубине 0,8 м. Из соотношения между напряжениями в центре и в угловой точке фундамента будем иметь:

$$\sigma_{1,6(i)(1)} = (1/4) \cdot \sigma_{0,8(e)} = (1/4) \cdot 480 = 120 \text{ кПа}.$$

Используя тот же принцип, определяем напряжение по вертикали, проходящей через точку  $i$ , на глубине 1,6 м, от нагрузки, действующей по прямоугольнику  $efih$ :

$$\sigma_{1,6(i)(2)} = (1/4) \cdot \sigma_{0,8(0)} = (1/4) \cdot 400 = 100 \text{ кПа}.$$

Окончательно в соответствии с методом угловых точек будем иметь:

$$\sigma_{1,6(i)} = \sigma_{1,6(i)(1)} - \sigma_{1,6(i)(2)} = 120 - 100 = 20 \text{ кПа}.$$

Вычисляем осадку слоя толщиной 0,5 м на глубине 1,6 м по вертикали, проведенной через точку  $i$ , по формуле метода послойного суммирования:

$$S = \beta \cdot \sigma_{1,6(i)} \cdot h/E = 0,8 \cdot 20 \cdot 0,5/5000 = 0,0016 \text{ м} = 1,6 \text{ мм.}$$

М.5.10. Геологический разрез под подошвой фундамента представлен суглинком ( $E=10$  МПа) толщиной 4 м, подстилаемым скальным грунтом ( $E>100$  МПа). Определить осадки фундаментов при среднем давлении по подошве 200 кПа: а – при  $b=10$  м,  $l=10$  м; б – при  $b=20$  м,  $l=20$  м. В расчетах принять:  $k_c=1,5$ ;  $k_m=1$ ;  $\xi=2 \cdot z/b$ ;  $k_i=\xi/4$ .

Поскольку в сжимаемой толще основания  $H_c$  залегает скальный грунт, для расчета осадок применяем метод линейно-деформируемого слоя:

$$S = \frac{p \cdot b \cdot k_c}{k_m} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{k_i - k_{i-1}}{E_i}.$$

Так как в пределах сжимаемой толщи грунт однородный, а коэффициенты  $k_i$  линейно зависят от  $z$ , принимаем толщину расчетного слоя 4 м.

а) на кровле слоя  $z_0 = 0$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $k_0 = 0$ ,  
на подошве слоя  $z_1 = 4$ ,  $\xi_1 = 2 \cdot 4/10 = 0,8$ ,  $k_1 = 0,8/4 = 0,2$ ;

$$S = \frac{200 \cdot 10 \cdot 1,5}{1} \cdot \frac{(0,2 - 0)}{10000} = 0,06 \text{ м} = 6 \text{ см.}$$

б) на кровле слоя  $z_0 = 0$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $k_0 = 0$ ,  
на подошве слоя  $z_1 = 4$ ,  $\xi_1 = 2 \cdot 4/20 = 0,4$ ,  $k_1 = 0,4/4 = 0,1$ ;

$$S = \frac{200 \cdot 20 \cdot 1,5}{1} \cdot \frac{(0,1 - 0)}{10000} = 0,06 \text{ м} = 6 \text{ см.}$$

В данном примере осадка фундамента не зависит от его площади в связи с относительно малой толщиной сжимаемого слоя.

М.5.11. Фундамент на однородном основании прямоугольной формы в плане с размерами сторон  $2 \times 3$  м нагружен вертикальной силой, приложенной в центре тяжести фундамента, и изгибающим моментом, действующим относительно центральной оси, параллельной короткой стороне фундамента. Крен фундамента по направлению действия момента составляет  $0,001$  рад.,  $\zeta = 2H_c/b = \text{const}$ . Чему будет равен крен фундамента если:

а – вертикальная сила увеличиться в 2 раза;

б – изгибающий момент и вертикальная сила уменьшатся в 2,5 раза;

в – длина и ширина фундамента увеличатся в 2 раза.

Крен фундамента вычисляется по формуле:

$$i = \frac{1 - \nu^2}{E \cdot k_m} \cdot k_e \frac{N \cdot e}{(a/2)^3}.$$

В этой формуле  $N \cdot e = M$ , где  $N$  – вертикальная сила, приложенная в центре тяжести фундамента;  $M$  – изгибающий момент, действующий относительно центральной оси, параллельной короткой стороне фундамента. Таким образом, при неизменном  $M$  изменение продольной силы  $N$  приводит к изменению эксцентриситета ее приложения  $e$ , так чтобы  $N \cdot e = M = \text{const}$ . С учетом сделанных замечаний получим следующие ответы:

а)  $i = 0,001$  рад.;

б)  $i = 0,001/2,5 = 0,0004$  рад.;

в) поскольку длина и ширина фундамента увеличатся в 2 раза,  $\eta = l/b = \text{const}$ ,  $\zeta' = \text{const}$  по условию и, следовательно, коэффициент  $k_e$ , зависящий от указанных параметров, останется неизменным,  
 $i = 0,001/2^3 = 0,000125$  рад.

М.5.12. Водонасыщенный слой грунта толщиной 2 м, подстилаемый дренажным слоем, пригружен насыпью через дренажный слой, создающей давление 200 кПа. Характеристики грунта:  $k_\phi = 0,864$  м/сутки;  $m_v = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/кН;  $\gamma_w = 10$  кН/м<sup>3</sup>. Определить скорость фильтрации грунтовой воды (м/сутки) в момент времени  $t = 0$  на границах слоя и в середине слоя.

Скорость фильтрации вычисляем по формуле:

$$q = \frac{k_\phi}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z}.$$

Определяем входящие в формулу величины:

$$p_z(z, t) = p \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{2 \cdot h}\right) \cdot e^{-N} \right];$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} = -p \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot h} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{2 \cdot h}\right) \cdot e^{-N}; \quad N = \frac{\pi^2 \cdot C_v}{4 \cdot h^2} \cdot t;$$

$$\text{при } t = 0 \quad N = 0 \text{ и } e^{-N} = 1; \quad \text{при } z = 0 \quad \partial p_z / \partial z = -2 \cdot p / h;$$

$$\text{при } z = 2 \cdot h \quad \partial p_z / \partial z = 2 \cdot p / h; \quad \text{при } z = h \quad \partial p_z / \partial z = 0; \quad h = 1 \text{ м.}$$

Окончательно имеем:

$$\text{при } z = 0 \quad q = - (0,864/10) \cdot (2 \cdot 200/1) = - 34,56 \text{ м/сут.};$$

$$\text{при } z = 2 \text{ м} \quad q = (0,864/10) \cdot (2 \cdot 200/1) = 34,56 \text{ м/сут.};$$

$$\text{при } z = 0 \quad q = 0.$$

М.5.13. Водонасыщенный слой грунта ограничен сверху и снизу дренажными слоями и пригружен давлением 100 кПа. Определить эффективные напряжения на границах слоя и в середине слоя в момент времени  $t = 0$ .

Эффективные напряжения в условиях одномерной задачи фильтрационного уплотнения определяются по формуле:

$$p_z(z, t) = p \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi \cdot z}{2 \cdot h} \cdot e^{-N} - \frac{4}{3 \cdot \pi} \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} \cdot e^{-9N} - \frac{4}{5 \cdot \pi} \sin \frac{5 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} \cdot e^{-25N} - \dots \right].$$

$$\text{При } t = 0 \quad N = \frac{\pi^2 \cdot C_v}{4 \cdot h^2} \cdot t = 0 \quad \text{и} \quad e^{-N} = e^{-9N} = e^{-25N} = e^{-49N} = 1.$$

$$\text{На границах слоя } z = 0 \text{ и } z = 2 \cdot h, \text{ а } \sin \frac{\pi \cdot z}{2 \cdot h} = \dots = \sin \frac{7 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} = 0.$$

$$\text{Поэтому на границах слоя при } t = 0 \quad p_z(z, t) = p = 100 \text{ кПа.}$$

В середине слоя

$$z = h, \quad \sin \frac{\pi \cdot z}{2 \cdot h} = \sin \frac{5 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} = 1, \quad \sin \frac{3 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} = \sin \frac{7 \cdot \pi \cdot z}{2 \cdot h} = -1.$$

С учетом этого имеем

$$p_z(z, t) = p \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots \right) \right] = p \cdot (1 - 1) = 0.$$

М.5.14. Водонасыщенный слой грунта толщиной 2 м, подстилаемый дренажным слоем, пригружен через дренажный слой насыпью, создающей давление 200 кПа. Характеристики грунта:  $k_f = 0,864$  м/сутки;  $m_v = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/кН;  $\gamma_w = 10$  кН/м<sup>3</sup>. Определить время, через которое эффективное давление в середине слоя будет равно 100 кПа.

Эффективные напряжения в условиях одномерной задачи фильтрационного уплотнения определяются по формуле:

$$p_z(z, t) \approx p \cdot \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \cdot e^{-N} \right],$$

где  $C_v = k_f / (\gamma_w \cdot m_v) = 0,864 / (10 \cdot 0,0001) = 864$  м<sup>2</sup>/сут.;  
 $N = (\pi^2 \cdot C_v) / (4 \cdot h^2) \cdot t = (3,14^2 \cdot 864) / (4 \cdot 1^2) \cdot t = 2130 \cdot t$ .

По условию задачи  $1 - (4/\pi) \cdot e^{-2130t} = 0,5$ , откуда  
 $e^{-2130t} = 0,3925$  или  $t = -\ln(0,3925) / 2130 = 0,0004391$  сут. = 38 с.

М.5.15. Дополнительное стабилизированное давление в центре водонасыщенного слоя толщиной 2 м, ограниченного дренажными слоями, составляет 200 кПа. Характеристики грунта:  $E = 7,43$  МПа;  $k_f = 10^{-8}$  м/с;  $m_v = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/кН;  $\gamma_w = 10$  кН/м<sup>3</sup>. Определить осадку слоя в момент времени  $t=0$ ,  $t=1$  сутки,  $t=30$  суток.

Определяем коэффициент фильтрационной консолидации грунта по формуле:

$$C_v = \frac{k_f}{\gamma_w \cdot m_v} = \frac{0,00000001}{10 \cdot 0,0001} = 0,00001 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Вычисляем показатель экспоненциальной функции

$$N = \frac{\pi^2 \cdot C_v}{4 \cdot h^2} \cdot t = \frac{3,14^2 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 1^2} \cdot t = 0,00002465 \cdot t.$$

Вычисляем стабилизированную осадку методом послойного суммирования:

$$S = \beta \cdot \frac{\sigma_{zp} \cdot 2 \cdot h}{E} = \frac{0,8 \cdot 200 \cdot 2}{7430} = 0,043 \text{ м}.$$

Вычисляем степень консолидации грунта для различных моментов времени:

$$t = 0: U(t) = 1 - (8/\pi^2) \cdot e^{-0,00002465 \cdot 0} + \dots = 1 - 1 = 0;$$

$$t = 1 \text{ сут.} = 86400 \text{ с}: U(t) = 1 - (8/\pi^2) \cdot e^{-0,00002465 \cdot 86400} + \dots = 1 - 0,096 = 0,9;$$

$$t = 30 \text{ сут.} = 2592000 \text{ с}: U(t) = 1 - (8/\pi^2) \cdot e^{-0,00002465 \cdot 2592000} + \dots = 1 - 0 = 1.$$

Осадки вычисляем по формуле:  $S(t) = S \cdot U(t)$ . Для указанных в условии моментов времени имеем:

$$S(0) = 0;$$

$$S(1 \text{ сут.}) = 0,043 \cdot 0,9 = 0,039 \text{ м} = 3,9 \text{ см};$$

$$S(30 \text{ сут.}) = 0,043 \cdot 1 = 0,043 \text{ м} = 4,3 \text{ см}.$$

М.5.16. Водонасыщенный слой толщиной 2 м ограничен снизу и сверху дренажными слоями и пригружен давлением 200 кПа. Характеристики грунта:  $E=7,43$  МПа;  $\nu=0,3$ ;  $k_f=10^{-8}$  м/с;  $\gamma_w=10$  кН/м<sup>3</sup>;  $\varphi=20^\circ$ ;  $c=30$  кПа. Определить прочность на сдвиг в середине слоя в момент времени  $t=0$ ,  $t=1$  сутки,  $t=30$  суток.

Определяем коэффициент вида напряженного состояния при компрессионном сжатии:

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot \nu^2}{1 - \nu} = 1 - \frac{2 \cdot 0,3^2}{1 - 0,3} = 0,743.$$

Определяем коэффициент относительной сжимаемости грунта:

$$m_v = \frac{\beta}{E} = \frac{0,743}{7430} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{кН}.$$

Определяем коэффициент фильтрационной консолидации грунта по формуле:

$$C_v = \frac{k_f}{\gamma_w \cdot m_v} = \frac{0,00000001}{10 \cdot 0,0001} = 0,00001 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Вычисляем показатель экспоненциальной функции

$$N = \frac{\pi^2 \cdot C_v}{4 \cdot h^2} \cdot t = \frac{3,14^2 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 1^2} \cdot t = 0,00002465 \cdot t.$$

Определяем эффективные напряжения в середине слоя по формуле

$$p_z(z, t) \approx p \cdot \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \cdot e^{-N} \right]:$$

$t = 0$ ,  $p_z(z, t) \approx 200 \cdot (1 - (4/\pi) \cdot e^{-0,00002465 \cdot 0}) \approx 0$  (эффективные напряжения не могут быть отрицательными, см. М.5.13);

$$t = 1 \text{ сут.} = 86400 \text{ с}, p_z(z, t) \approx 200 \cdot (1 - (4/\pi) \cdot e^{-0,00002465 \cdot 86400}) = 170 \text{ кПа};$$

$$t = 30 \text{ сут.} = 2592000 \text{ с}, p_z(z, t) \approx 200 \cdot (1 - (8/\pi^2) \cdot e^{-0,00002465 \cdot 2592000}) = 200 \text{ кПа}.$$

Определяем прочность грунта на сдвиг в середине слоя по формуле

$$\tau(t) = p_h(t) \cdot \operatorname{tg} \varphi + c:$$

$$t = 0, \quad \tau(0) = 0 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 30 = 30 \text{ кПа};$$

$$t = 1 \text{ сут.}, \quad \tau(1) = 170 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 30 = 91,9 \text{ кПа};$$

$$t = 30 \text{ сут.}, \quad \tau(30) = 200 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ + 30 = 102,8 \text{ кПа}.$$

М.5.17. Водонасыщенный слой толщиной 3 м ограничен сверху дренажным слоем, снизу водоупором и пригружен насытью, создающей давление 50 кПа. Определить дополнительные эффективные стабилизированные давления в слое от нагрузки на глубине 1,5 м и 3 м, если начальный градиент гидравлического напора для грунта составляет  $i_o = 0,3$ . В расчетах принять удельный вес поровой воды  $\gamma_w = 10$  кН/м<sup>3</sup>.

Определяем стабилизированное давление в поровой воде, которое при наличии начального градиента будет равно:

$$p_w(z) = H_{w0} \cdot \gamma_w = i_o \cdot z \cdot \gamma_w = 0,3 \cdot 10 \cdot z = 3 \cdot z.$$



Стабилизированное эффективное давление определяем по формуле

$$p_z = p - p_w(z):$$

$$z = 1,5 \text{ м}, \quad p_z = 50 - 3 \cdot 1,5 = 45,5 \text{ кПа};$$

$$z = 3 \text{ м}, \quad p_z = 50 - 3 \cdot 3 = 41 \text{ кПа}.$$

*М.5.18. Определить осадки слоя грунта толщиной 1 м, находящегося в состоянии затухающей ползучести в момент времени  $t=0$ ,  $t=1$  час,  $t=30$  суток при следующих исходных данных:  $\beta=0,8$ ;  $\sigma_z=300$  кПа;  $E_{мгн}=100$  МПа;  $\delta=0,0001924$  1/с;  $\delta_1=0,00002138$  1/с.*

Определяем деформацию ползучести грунта в условиях компрессионного сжатия по формуле:

$$\varepsilon_z(t) = \frac{\beta}{E_{мгн}} \left[ \sigma(t) + \int_0^t \delta e^{-\delta_1(t-\tau)} \cdot \sigma(\tau) d\tau \right]$$

При  $\sigma(t) = \text{const}$  будем иметь:

$$\varepsilon_z(t) = \frac{\beta \cdot \sigma}{E_{мгн}} \left[ 1 + \int_0^t \delta \cdot e^{-\delta_1(t-\tau)} d\tau \right] = \frac{\beta \cdot \sigma}{E_{мгн}} \left[ 1 + \frac{\delta}{\delta_1} e^{-\delta_1(t-\tau)} \Big|_0^t \right] = \frac{\beta \cdot \sigma}{E_{мгн}} \left[ 1 + \frac{\delta}{\delta_1} (1 - e^{-\delta_1 t}) \right]$$

При  $t = 0$ :

$$\varepsilon_z(t) = \frac{0,8 \cdot 300}{100000} \left[ 1 + \frac{0,0001924}{0,00002138} \cdot (1 - e^{-0,00002138 \cdot 0}) \right] = 0,0024,$$

$$S = \varepsilon_z(t) \cdot h = 0,0024 \cdot 1 = 0,0024 \text{ м} = 2,4 \text{ мм}.$$

При  $t = 1$  час = 3600 с

$$\varepsilon_z(t) = \frac{0,8 \cdot 300}{100000} \left[ 1 + \frac{0,0001924}{0,00002138} \cdot (1 - e^{-0,00002138 \cdot 3600}) \right] = 0,004$$

$$S = \varepsilon_z(t) \cdot h = 0,004 \cdot 1 = 0,004 \text{ м} = 4 \text{ мм}.$$

При  $t = 30$  сут. = 2592000 с

$$\varepsilon_z(t) = \frac{0,8 \cdot 300}{100000} \left[ 1 + \frac{0,0001924}{0,00002138} \cdot (1 - e^{-0,00002138 \cdot 2592000}) \right] = 0,024,$$

$$S = \varepsilon_z(t) \cdot h = 0,024 \cdot 1 = 0,024 \text{ м} = 24 \text{ мм}.$$

*М.5.19. При испытании грунта штампом измерялись его осадки во времени с периодичностью один раз в сутки при постоянных уровнях нагружения. Результаты испытания приведены в таблице*

Уровень нагружения $\sigma_z$ , кПа	Величины осадок, см, по суткам				
	1	2	3	4	5
200	2,00	2,20	2,30	2,38	2,44
400	4,00	4,30	4,60	4,90	5,20
600	6,00	6,40	6,90	7,50	8,20

Определить стадии ползучести грунта при различных уровнях нагружения штампа.

Для ответа на вопрос определим скорости осадки штампа  $dS/dt$  при трех уровнях нагружения.

Уровень нагружения $\sigma_z$ , кПа	Скорости осадок $dS/dt$ , см/сут., в интервалах суток				
	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5
200	2,00	0,20	0,10	0,08	0,06
400	4,00	0,30	0,30	0,30	0,30
600	6,00	0,40	0,50	0,60	0,70

При  $\sigma_z = 200$  кПа  $dS/dt \rightarrow 0$ . Это стадия затухающей ползучести.

При  $\sigma_z = 400$  кПа  $dS/dt = \text{const}$ . Это стадия незатухающей ползучести.

При  $\sigma_z = 600$  кПа  $dS/dt \rightarrow \infty$ . Это стадия прогрессирующей ползучести.

М.5.20. Фундамент опирается на слой пластичной глины толщиной 1 м, подстилаемой скальным грунтом. Характеристики грунта:  $\varphi = 20^\circ$ ;  $c_c = 20$  кПа;  $\eta = 1,2 \cdot 10^7$  кН·с/м<sup>2</sup>. Давление под подошвой фундамента 300 кПа. Горизонтальная нагрузка, приложенная к фундаменту, создает касательные напряжения по подошве 150 кПа. Определить линейную скорость горизонтальной подвижки фундамента в предположении однородного напряженно-деформированного состояния слоя пластичной глины.

Для определения скорости деформации сдвига используем уравнение вязкого течения Бингама–Шведова:

$$\tau(t) = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + c_c + \eta \cdot \frac{d\gamma}{dt};$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\tau(t) - \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi - c_c}{\eta} = \frac{150 - 300 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - 20}{1,2 \cdot 10^7} = 1,734 \cdot 10^{-6} \text{ 1/с.}$$

Линейную скорость горизонтальной подвижки фундамента определяем по формуле:

$$v_g = h \cdot (d\gamma/dt) = 1000 \cdot 1,734 \cdot 10^{-6} = 1,734 \cdot 10^{-3} \text{ мм/с} = 149,8 \text{ мм/сут.}$$

М.5.21. При установившемся уровне воды в котловане производится ее откачка. Скорость фильтрации воды в котлован при ее откачке постоянна. 70 насосов откачивают воду из котлована за 20 дней, 30 насосов за 60 дней. Сколько потребуется насосов для откачки воды за 30 дней.

Баланс фильтрующей в котлован и откачиваемой из котлована воды записываем в виде формулы:

$$Q_0 + q \cdot t = q_n \cdot n \cdot t,$$

где  $Q_0$  – установившийся объем воды в котловане на начало откачки;  $q$  – скорость фильтрации воды в котлован;  $q_n$  – скорость откачки воды одним насосом;  $n$  – количество насосов;  $t$  – время откачки воды из котлована.

Используя исходные данные, получаем три разрешающих уравнения:

$$Q_0 + q \cdot 20 = q_n \cdot 70 \cdot 20; \quad Q_0 + q \cdot 60 = q_n \cdot 30 \cdot 60; \quad Q_0 + q \cdot 30 = q_n \cdot x \cdot 30.$$

Исключая из указанных уравнений  $Q_0$ , получим два разрешающих уравнения:

$$40 \cdot q = 400 \cdot q_n; \quad 10 \cdot q = 30 \cdot x \cdot q_n - 1400 \cdot q_n.$$

Определяя из первого уравнения отношение  $q/q_n$  и сокращая второе уравнение на  $q_n$ , будем иметь:  $x = 50$  насосов.

## **Лабораторные работы**

### **Тематический план лабораторных работ**

Лабораторные работы рассчитаны на 18 учебных часов.

Лабораторная работа № 1. Определение деформационных характеристик глинистого грунта по результатам компрессионных испытаний (4 часа).

Лабораторная работа № 2. Определение деформационных характеристик песчаного грунта на приборах системы Гидропроект (4 часа).

Лабораторная работа № 3. Определение прочностных характеристик глинистого грунта на приборах одноплоскостного среза ПЛЛ-9 (4 часа).

Лабораторная работа № 4. Определение прочностных характеристик песчаного грунта на приборах одноплоскостного среза системы «Гидропроект» (4 часа).

Лабораторная работа № 5. Определение угла естественного откоса песчаного грунта (2 часа).

## **Лабораторная работа № 1.**

### **Определение деформационных характеристик глинистого грунта по результатам компрессионных испытаний.**

#### **Цель работы:**

1. Освоение методики определения деформационных характеристик глинистого грунта.
2. Ознакомление с устройством, принципом работы и проведением испытаний в компрессионном приборе (одометре).
3. Изучение сжимаемости глинистого грунта во времени.

#### **Необходимое оборудование и материалы**

1. Методические указания к проведению работы.
2. Журнал лабораторных работ.
3. Компрессионный прибор ПЛЛ-9 (одометр).
4. Образец глинистого грунта ненарушенной структуры.
5. Индикатор часового типа, фильтровальная бумага, тарированные грузы весом 0,5 кгс.

#### **Общие сведения**

Сжимаемостью грунта называют его способность уменьшаться в объеме (деформироваться) под действием внешней нагрузки. Сжимаясь, грунт стремится расшириться в стороны, претерпевая при этом противодействие со стороны окружающего грунта. Под центром фундамента грунт сжимается без возможности бокового расширения. Важно помнить, что такое сжатие называют компрессионным. Оно происходит за счет уменьшения объема пор грунта, так как скелет и вода считаются практически несжимаемыми.

Компрессионные испытания проводятся для изучения сжимаемости главным образом глинистых грунтов ненарушенной структуры при естественной влажности или предварительно увлажненных до полного водонасыщения.

Испытания глинистых грунтов нарушенной структуры, а также песков проводятся только при специальных исследованиях.

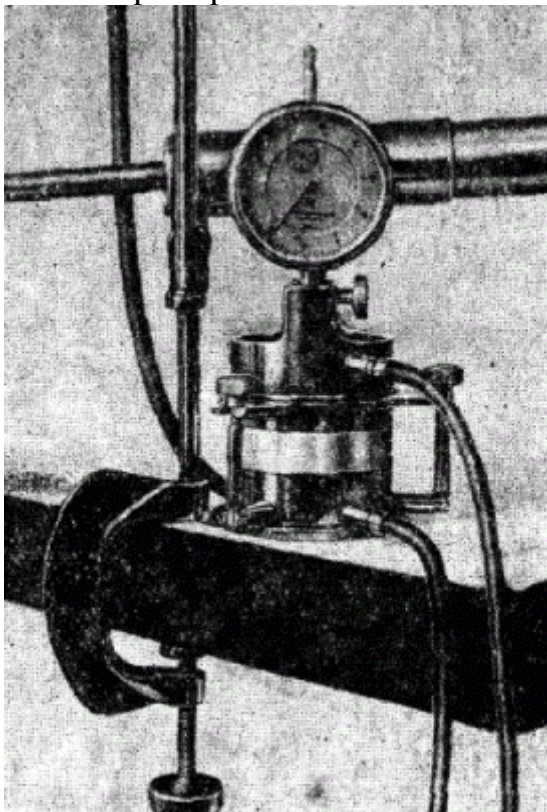
Сжимаемость грунтов характеризуется изменением коэффициента пористости при изменении давления в условиях трехосного сжатия без возможности бокового расширения. Испытание грунта завершается построением компрессионной кривой и определением таких характеристик деформативных свойств грунтов, как коэффициент сжимаемости  $m_0$  и модуль общей деформации  $E_0$ .

Указанные характеристики используются для расчета деформаций оснований и для общей качественной оценки строительных свойств грунтов.

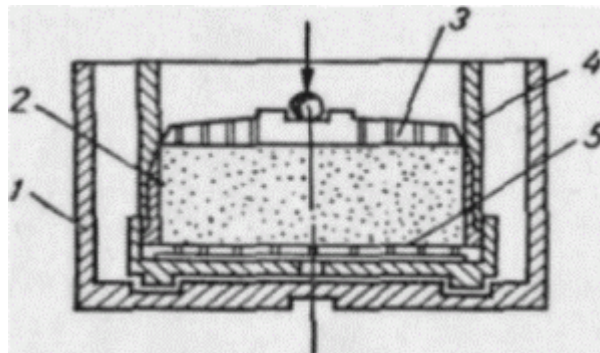
Для испытаний применяют компрессионные приборы (одометры) типа КП, К-1 и др., а также прибор системы ПЛЛ И.М. Литвинова. Испытания проводятся по нормальным и ускоренным методикам. Рассмотрим испытания, которые проводятся по ускоренной методике.

### Испытания в компрессионном приборе ПЛЛ-9

Компрессионный прибор (рис. 1, 2), включенный в состав полевой лаборатории ПЛЛ-9, позволяет производить исследования как сжимаемости грунтов под нагрузкой, так и просадочных и фильтрационных свойств грунтов. Следует отметить, что в отличие от других приборов, применяемых в изыскательской практике, одометр приспособлен к работе в полевых условиях. Для достижения этой цели прибор снабжен специальным переносным зажимным устройством, с помощью которого он может быть надежно прикреплен к любому предмету: столу, скамье, доске и пр. Приложение внешней нагрузки к испытываемому образцу осуществляется с помощью простого раздвижного рычага, который прикрепляется к тому же зажимному устройству. Для насыщения образца во время опыта водой, а также для возможности определения фильтрационных свойств грунта имеется специальный резервуар для воды, соединенный резиновой трубкой с основной частью прибора.



**Рис. 1. Общий вид компрессионного прибора полевой лаборатории.**



**Рис. 2. Принципиальная схема компрессионного прибора**

- 1 – ванна;
- 2 – грунтоотборочное кольцо с грунтом;
- 3 – перфорированный поршень;
- 4 – обойма;
- 5 – перфорированный диск.

Другой особенностью компрессионного прибора является то, что образцы грунта с ненарушенной структурой помещаются в прибор в тех же гильзах, в которых производился отбор монолитов. Перемещение образцов в специальные гильзы не требуется, что способствует лучшему сохранению ненарушенной структуры грунта и естественной влажности в период времени между отбором образцов и проведением испытаний.

При проведении компрессионных испытаний в стационарных условиях телескопически раздвижной загрузочный рычаг можно выдвигать не на всю его длину (т.е. на расстояние 1125 мм между крайними шарнирами рабочей части), а на половину (т.е. на расстояние 556,2 мм между осями тех же шарниров), что сокращает вдвое габариты, занимаемые прибором.

### **Проведение испытаний**

В зависимости от вида подвергающихся компрессионным испытаниям образцов различают:

- испытание образца грунта природного сложения и природной влажности;
- испытание образца грунта природного сложения с замачиванием после приложения определенной нагрузки;
- испытание образца грунта с предварительным увлажнением до полного насыщения.

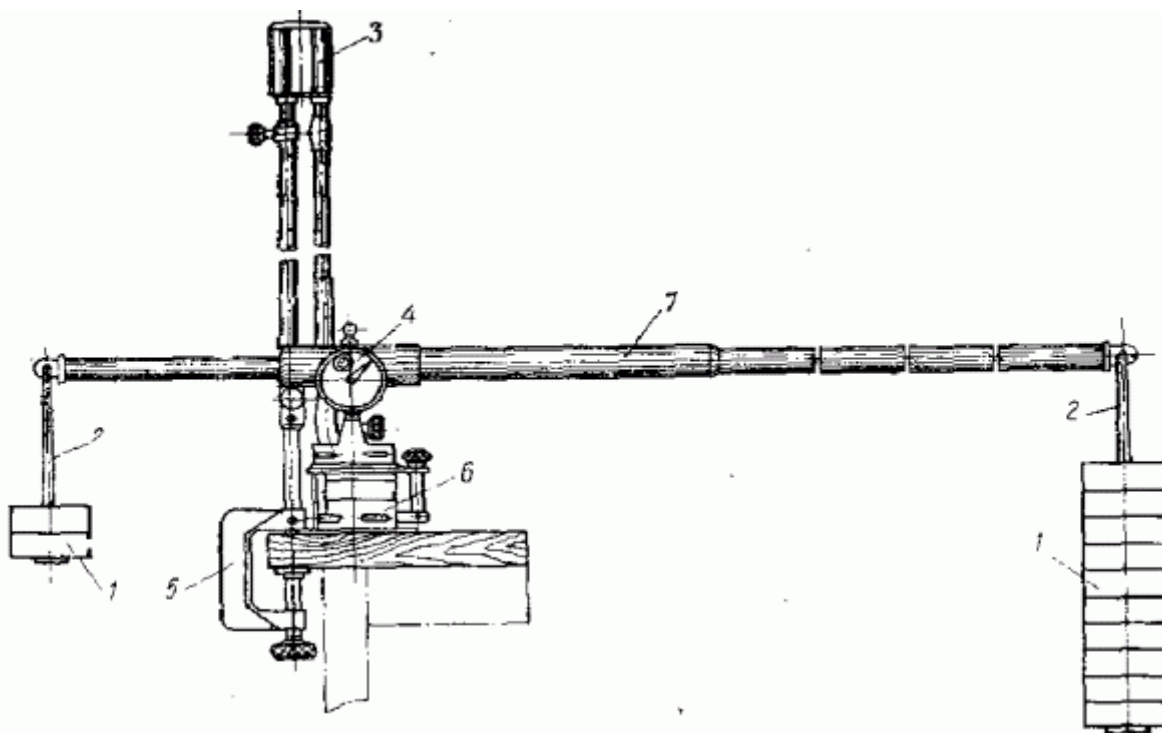
Испытания проводят по общепринятой или (только для учебных целей) ускоренной методике.

Образцы грунта, отобранные из шурфов непосредственно в компрессионные гильзы (в которых проводят испытание), до помещения их в компрессионный прибор должны быть закрыты крышками; шов между гильзой и ее крышкой изолируют пластилином или липкой лентой. Компрессионный прибор устанавливают на горизонтальной неподвижной плоскости. Прибор привинчивают к опорной плоскости с помощью трубки. Если испытание предполагают вести с предварительным замачиванием грунта, привинчивают штатив с воронкой и резиновой трубкой. Последнюю нижним концом присоединяют к ниппелю нижней выводной трубки.

Испытываемый образец вместе с компрессионной гильзой и бумажными фильтрами по торцам устанавливают на нижний дренажный диск режущей кромкой вверх. Сверху на образец устанавливают поршень с верхним дренажным диском, после чего прибор завинчивают. Поршень ставят на образец грунта и закрепляют винтом. Центровку поршня производят тремя стяжными винтами. Рычажную систему с выдвинутыми до отказа звеньями устанавливают, прикрепляя ее к верхней части зажимного устройства и опирая на призму штока поршня. Рычаг уравнивают в нейтральном положении грузами на подвеске противовеса, затем закрепляют в траверсе прибора индикатор, упирая его ножку в поршень так, чтобы она поднялась вверх на 70 – 80 % свободного хода (на 7 – 8 мм), после чего устанавливают на нуль поворотную шкалу индикатора.

Закончив установку, отпускают зажимной винт поршня и приступают к испытанию.

Если образец грунта испытывают с предварительным замачиванием, то после его установки в приборе и закрепления поршня в напорную воронку заливают воду, которая через резиновую трубку попадает в нижнюю (дренажную) часть прибора и выталкивает собравшийся там воздух через вторую выводную трубку нижней части прибора. После того, как вода заполнит нижнюю часть прибора и весь имевшийся там воздух будет удален, резиновую выводную трубку закрывают зажимом, и вода через отверстие в дренажном диске проходит вверх, увлажняя образец. Когда образец полностью пропитается водой, о чем сигнализирует появление воды в верхней части прибора (над поршнем), отвинчивают зажимной винт поршня и приступают к нагружению прибора (рис. 3).



**Рис. 3. Схема установки компрессионного прибора:**

**1 – гири; 2 – подвески к рычагу; 3 – штатив с воронкой; 4 – индикатор; 5 – зажимное устройство; 6 – основная часть прибора; 7 – рычажная система.**

При проведении испытаний по общепринятой методике прибор загружают долями нагрузки по 50 кПа. Для прибора лаборатории Литвинова давление на образец грунта 100 кПа создается нагрузкой на рычаг, равной 1 кгс. Каждую ступень (долю) нагрузки при общепринятой методике испытаний доводят до условной стабилизации деформации грунта. За условную стабилизацию деформации принимают величину сжатия образцов, не превышающую 0,01 мм:

- для песчаных грунтов – за 30 мин;
- для супесей – за 3 ч;
- для суглинков и глин – за 12 ч.

Для проведения данной лабораторной работы условная стабилизация деформации грунта составляет в учебных целях 0,01 мм за 1 мин. Отсчеты по индикатору берутся через каждую минуту. Нагрузку доводят до 0,2–0,3 МПа.

До начала испытаний компрессионный прибор необходимо предварительно протарировать, для чего его устанавливают в рабочем положении с размещением внутри компрессионной гильзы металлической тарировочной болванки (вместо образца грунта) с двумя бумажными фильтрами по ее торцам. Высота тарировочной болванки равна высоте компрессионной гильзы. Дренажный поршень опирают на тарировочную болванку, устанавливают и уравнивают рычаг и загружают прибор.

Нагрузку прикладывают ступенями по 0,05 МПа с интервалом времени 5 мин, доводя общую величину ее до 0,6 МПа. Тарировку производят три раза и по полученным средним арифметическим величинам определяют деформацию прибора в зависимости от интенсивности нагрузки. По данным тарировки составляют тарировочную кривую прибора (рис. 4). Тарировку прибора производят периодически не реже одного раза в шесть месяцев.



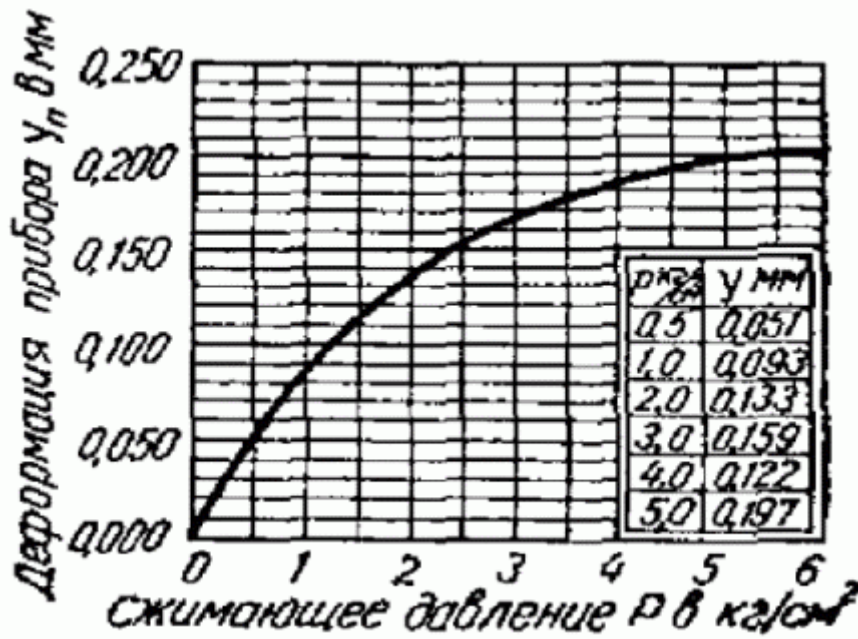


Рис. 4. Тарировочная кривая.

К началу испытаний размеры образца грунта составляют: высота  $h=20$  мм, площадь  $F=25$  см<sup>2</sup>.

Таблица 1.

Исходные данные:	Вид грунта	$h$ , мм	$A$ , см <sup>2</sup>	$e_0$
	глины	20	25	0,78

При компрессионном сжатии образца грунта измеряются изменения его высоты

$$\Delta h_i = h_0 - h_i. \quad (1)$$

При этом начальной высоте образца грунта  $h_0$  соответствует коэффициент пористости  $e_0$ , а измененной высоте образца  $h_i$  – измененный коэффициент пористости  $e_i$ .

Изменение коэффициента пористости, вызванное нагружением грунта в условиях компрессионного сжатия, вычисляется в функции от осевой деформации  $\varepsilon_{z,i} = \Delta h_i / h_0$  по следующей зависимости:

$$\Delta e_i = (1 + e_0) \cdot \varepsilon_{z,i} = (1 + e_0) \cdot \frac{\Delta h_i}{h_0}. \quad (2)$$

Измененный коэффициент пористости  $e_i$  вычисляется через измеряемые в опыте величины в соответствии с выражением:

$$e_i = e_0 - (1 + e_0) \cdot \varepsilon_{z,i} = e_0 - (1 + e_0) \cdot \frac{\Delta h_i}{h_0}. \quad (3)$$

Результаты измерений и определения измененного коэффициента пористости сводятся в таблицу 2.



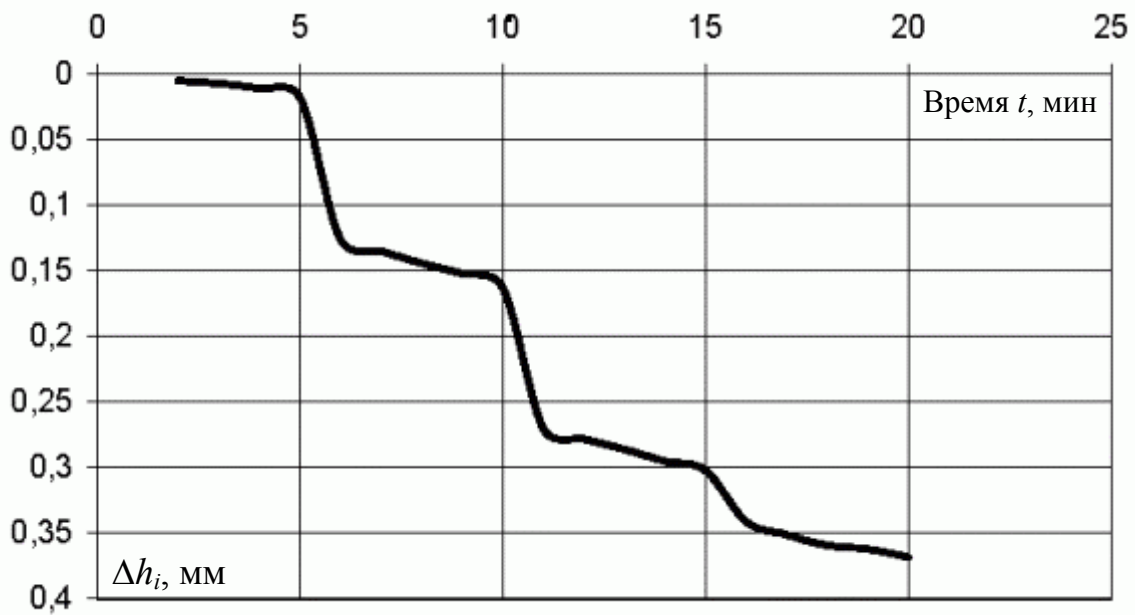
Таблица 2.

**Результаты компрессионного испытания грунта.**

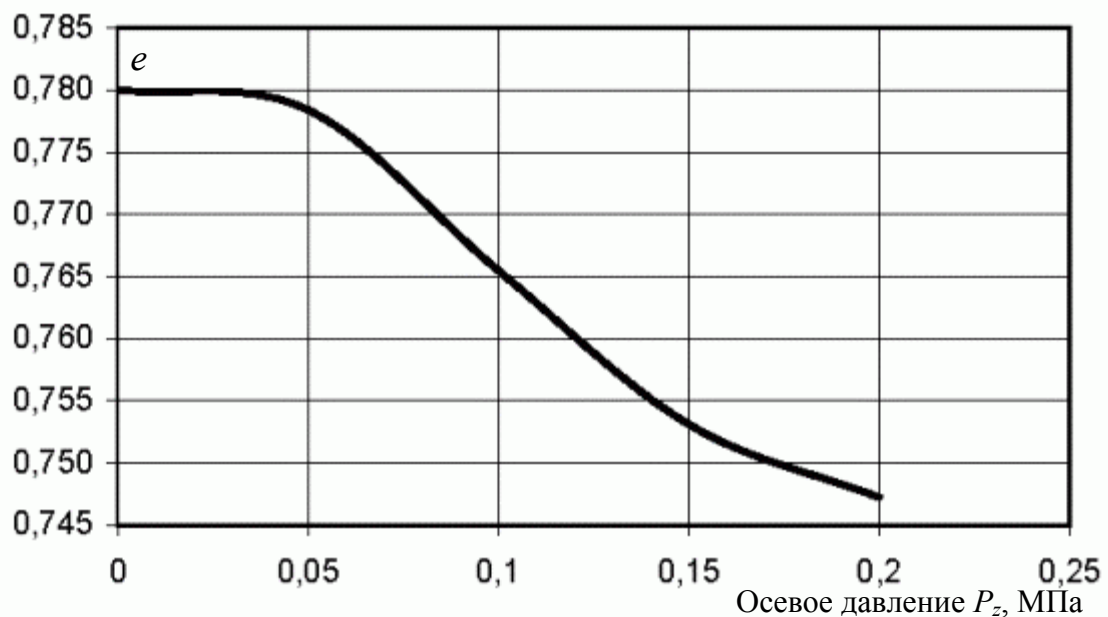
Вертикальное давление $P_z$ , МПа	Время	Показания индикатора	Стабилизированные изменения высоты образца	Относительная осевая деформация образца	Коэффициент пористости
	$t$ , мин	$\Delta h_i$ , мм	$\Delta h_i$ , мм	$\varepsilon_{z,i} = \Delta h_i / h_0$	$e_i = e_0 - \Delta e_i$
0	0	0	0	0	$e_0$
0,05	1				
	2				
	3				
	4				
	5				
0,1	6				
	7				
	8				
	9				
	10				
0,15	11				
	12				
	13				
	14				
	15				
0,2	16				
	17				
	18				
	19				
	20				

Зависимость изменения коэффициента пористости от вертикального давления при компрессионном сжатии грунта изображают графиком (рис. 6), который называют компрессионной кривой. Начало графика обычно изображают горизонтальной линией, параллельной оси давлений. Искривление графика начинается с момента разрушения структурных связей или с момента исчерпания структурной прочности грунта, что одно и то же. После этого деформации грунта происходят исключительно за счет его уплотнения, т.е. изменения пористости. В опыте на компрессионное сжатие должно, как правило, отсутствовать поровое давление, что достигается применением открытой, по отношению к фильтрации поровой воды, схемы испытания (испытание по дренированно-консолидированной схеме). Присутствие порового давления в опыте может существенно исказить результаты испытаний (занизить значение коэффициента сжимаемости и завысить значение модуля деформации).

**Обработка результатов испытания. По результатам испытаний строят графики, представленные на рис. 5 и 6.**



**Рис. 5. График изменения высоты образца грунта во времени.**



**Рис. 6. Компрессионная кривая.**

Значение коэффициента сжимаемости по компрессионной кривой определяется в соответствии с формулой:

$$m_0 = \frac{e_1 - e_2}{P_2 - P_1} \quad (4)$$

где  $e_1$  — коэффициент пористости, соответствующий на компрессионной кривой бытовому (от собственного веса грунта) давлению  $P_1$  на уровне подошвы фундамента;

$e_2$  — коэффициент пористости, соответствующий на компрессионной кривой среднему давлению под подошвой фундамента  $P_2$ .

В дифференциальной форме выражение (4) соответствует закону уплотнения Терцаги:

$$de = -m_0 \cdot dP, \quad (5)$$

где знак «минус» указывает на то, что увеличению давления соответствует уменьшение коэффициента пористости.

Относительный коэффициент сжимаемости определяется согласно формуле:

$$m_v = \frac{m_0}{(1 + e_0)} \quad (6)$$

Модуль деформации грунта, определяемый по компрессионной кривой:

$$E_k = \frac{\beta}{m_v} \quad (7)$$

где  $\beta$  – коэффициент вида напряженного состояния в опыте по определению модуля деформации грунта. При определении модуля деформации грунта из опыта на компрессионное сжатие:

$$\beta = 1 - \frac{2 \cdot v^2}{1 - v} \quad (8)$$

где  $v$  – коэффициент Пуассона (для песчаных грунтов  $v = 0,25$ ; для супесей  $v = 0,3$ ; для суглинков  $v = 0,35$ ; для глин  $v = 0,42$ ).

Модуль общей деформации грунта:

$$E = E_k \cdot m_k. \quad (9)$$

Значение коэффициента перехода от результатов лабораторных испытаний грунта к натурным  $m_k$  принимается по табл. 3.

Таблица 3.

Вид грунта	Значения коэффициента $m_k$ при коэффициенте пористости $e_0$						
	0,45	0,55	0,65	0,75	0,9	0,95	1,05
Супесь	4	4	3,5	3	2	—	—
Суглинок	5	5	4,5	4	3	2,5	2
Глина	—	—	6	6	5,5	5	4,5

В зависимости от полученной величины модуля общей деформации делается вывод о принадлежности грунта к классификационным группам по сжимаемости (сильносжимаемый  $E \leq 5$  МПа, среднесжимаемый  $5 < E \leq 30$  МПа или слабосжимаемый  $E > 30$  МПа).

**Лабораторная работа № 2.****Определение деформационных характеристик песчаного грунта на приборах системы Гидропроект.****Цель работы:**

1. Освоение методики определения деформационных характеристик песчаного грунта.
2. Ознакомление с устройством, принципом работы и проведением испытаний в компрессионном приборе (одомере).

**Необходимое оборудование и материалы**

1. Методические указания к проведению работы.
2. Журнал лабораторных работ.
3. Компрессионный прибор системы Гидропроект (рис. 7, 8, 9).
4. Песок средней крупности в воздушно - сухом состоянии.
5. Два индикатора часового типа, фильтровальная бумага, тарированные грузы весом 5 кгс.

Описательная часть данной работы аналогична лабораторной работе № 1.

Результаты измерений и определения измененного коэффициента пористости сводятся в таблицу 4.

Таблица 4

Результаты компрессионного испытания грунта.

Вертикальное давление $P_z$ , МПа	Показания индикатора		Осредненные изменения высоты образца	Относительная осевая деформация образца	Коэффициент пористости
	Левого	Правого			
	$\Delta h_i^n$ , мм	$\Delta h_i^n$ , мм			
0	0	0	0	0	$e_0$
0,05					
0,1					
0,15					
0,2					

По результатам испытаний строится зависимость изменения коэффициента пористости от вертикального давления, которая называется компрессионной кривой (см. рис. 6).

Значение коэффициента сжимаемости согласно компрессионной кривой определяется по формуле (4).

Относительный коэффициент сжимаемости определяется согласно формуле (6).

Модуль общей деформации грунта

$$E = \frac{\beta}{m_v} \quad (10)$$

где  $\beta$  – то же, что в формуле (7).

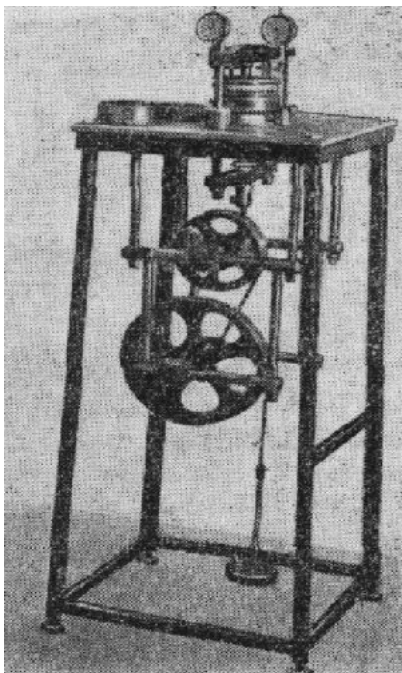


Рис. 7. Общий вид  
компрессионного прибора системы  
«Гидропроект»

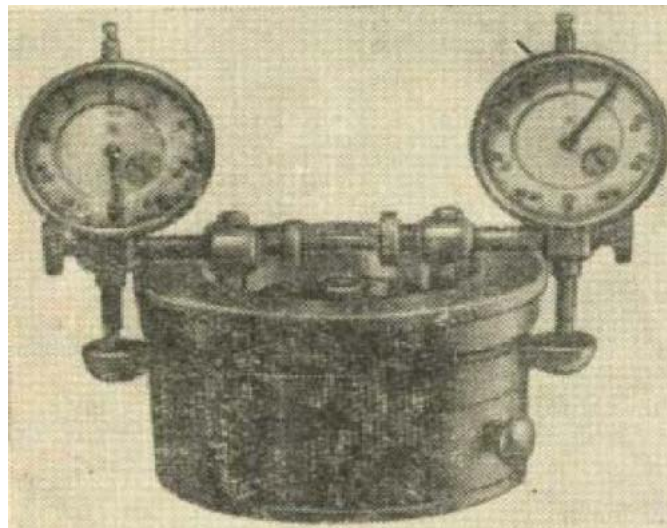


Рис. 8. Верхняя часть компрессионного  
прибора системы «Гидропроект»

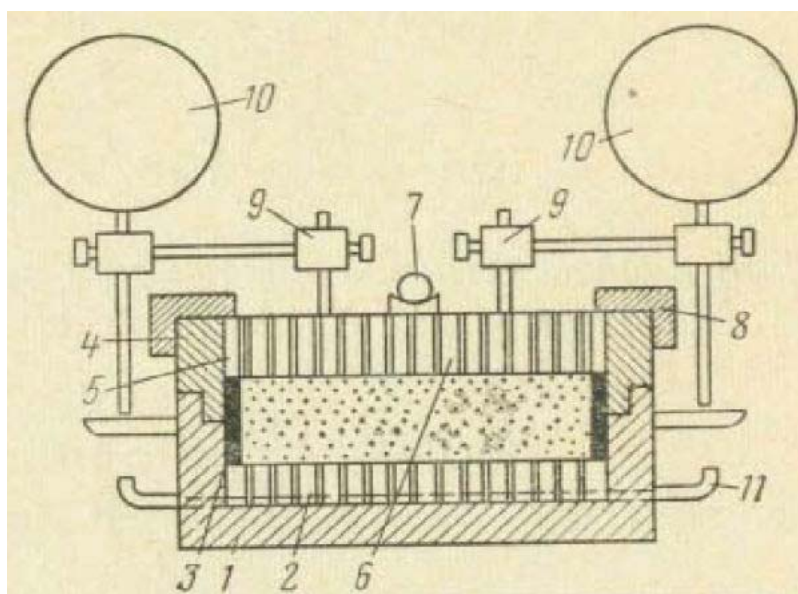


Рис. 9. Схематический разрез компрессионной части прибора системы  
«Гидропроект»

1 – нижняя обойма; 2 – перфорированный диск; 3 – режущее кольцо; 4 – верхняя обойма; 5 – направляющее кольцо; 6 – перфорированный поршень; 7 – стальной шарик; 8 – стопорная гайка; 9 – держатель индикатора; 10 – индикатор часового типа (мессура); 11 – штуцер.

Для прибора системы «Гидропроект» давление на образец грунта 100 кПа создается нагрузкой на рычаг равной 10 кгс.

В зависимости от полученной величины модуля общей деформации делается вывод о принадлежности грунта к классификационным группам по сжимаемости (сильносжимаемый  $E \leq 5$  МПа, среднесжимаемый  $5 < E \leq 30$  МПа или слабосжимаемый  $E > 30$  МПа).

### **Лабораторная работа № 3.**

#### **Определение прочностных характеристик глинистого грунта на приборах одноплоскостного среза ПЛЛ-9.**

##### **Цель работы:**

1. Ознакомление с методикой определения характеристик сопротивления грунта сдвигу.
2. Приобретение навыков в работе с приборами одноплоскостного среза.
3. Определение прочностных характеристик глинистого грунта по результатам испытаний.

##### **Необходимое оборудование и материалы:**

1. Методические указания к выполнению работы.
2. Журнал лабораторных работ.
3. Прибор одноплоскостного среза полевой лаборатории Литвинова.
4. Индикаторы часового типа.
5. Фильтровальная бумага, тарированные грузы весом 1, 2, 5 Н.
6. Образец глинистого грунта.

Характеристики сопротивления грунта сдвигу необходимы при расчете несущей способности оснований, оценке устойчивости грунтовых массивов и откосов, расчете давления грунтов на подпорные стены и для других инженерных расчетов. Определяемые при соответствующих испытаниях грунтов углы внутреннего трения и удельные сцепления являются важнейшими характеристиками грунтов, которые называются прочностными.

Определение предельной нагрузки на основания различных фундаментов и величин давления грунта на подпорные стены, проверка устойчивости откосов земляных насыпей, а также решение многих других задач в различных условиях строительства производится на основании зависимостей, получаемых при испытаниях грунтов на сдвиг.

Значения характеристик сопротивления грунтов сдвигу используются также при расчете оснований по деформированной схеме с использованием конечно-элементных расчетных моделей. В этом случае чаще всего в качестве условия прочности грунта используется закон Кулона-Мора, в уравнения которого входят в качестве параметров прочности углы внутреннего трения и удельное сцепление грунта.

Угол внутреннего трения и удельное сцепление представляют собой параметры графика прочности грунта, выражающего зависимость предельных касательных напряжений  $\tau$  от сжимающих давлений  $P$  при сдвиге.

Предельное касательное напряжение или сопротивление грунта сдвигу складывается из сил внутреннего трения и сцепления. При этом коэффициентом внутреннего трения является тангенс угла внутреннего трения. В песчаных (несвязных) грунтах сопротивление сдвигу обусловлено исключительно силами внутреннего трения между частицами грунта.

Сопротивление сдвигу связных грунтов (супеси, суглинки, глины) складывается из сил внутреннего трения и сил сцепления.

Испытания проводят для глинистых и песчаных грунтов на образцах ненарушенной структуры и естественной влажности, а также на образцах нарушенной структуры. При испытаниях грунта в заданном состоянии образцы грунта предварительно увлажняют до полного водонасыщения. В зависимости от условий работы грунта под давлением от сооружения или собственного веса различают испытания на неконсолидированный (по закрытой системе) и консолидированно-дренированный сдвиг (по открытой системе).

В первом случае осуществляют так называемый "быстрый" сдвиг, при котором влажность и плотность грунта после приложения сжимающего давления в процессе испытания практически не меняется. При этом касательные напряжения быстро увеличивают сразу после приложения сжимающего давления. Такое испытание применимо к глинистым водонасыщенным грунтам.

Во втором случае грунт после приложения сжимающего давления выдерживают до стабилизации деформации, а касательные напряжения в плоскости сдвига увеличивают ступенями.

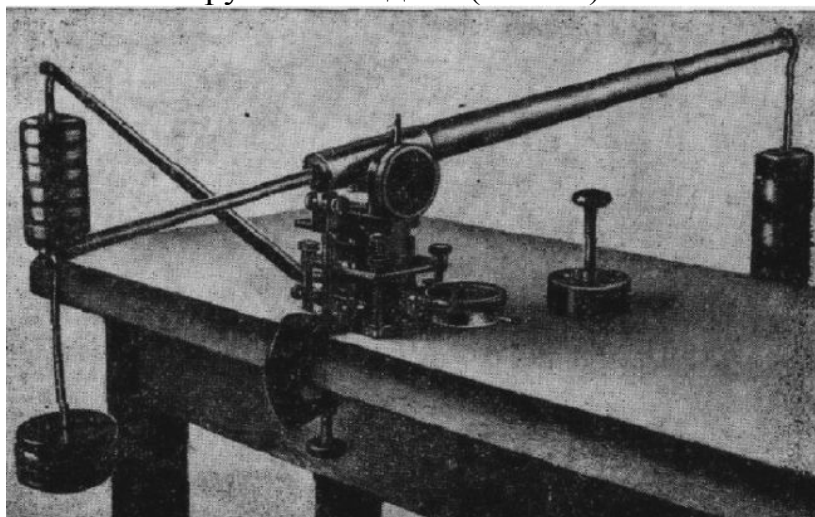
Так как испытания проводят на 2–3 образцах при различных сжимающих давлениях, то для обеспечения при испытании одинаковой влажности и плотности к этим образцам предварительно прикладывают наибольшее сжимающее давление, после чего отдельные образцы разгружают до требуемого давления. Предварительное обжатие образцов проводят или в приборах для испытания на сдвиг или в специальных приборах предварительного уплотнения. Испытание по открытой схеме применимо как к глинистым, так и к песчаным грунтам.

Для испытания грунтов на сдвиг применяют сдвиговые приборы различной конструкции: прибор одноплоскостного среза ПЛЛ-9, сдвиговой прибор системы "Гидропроект" и др.

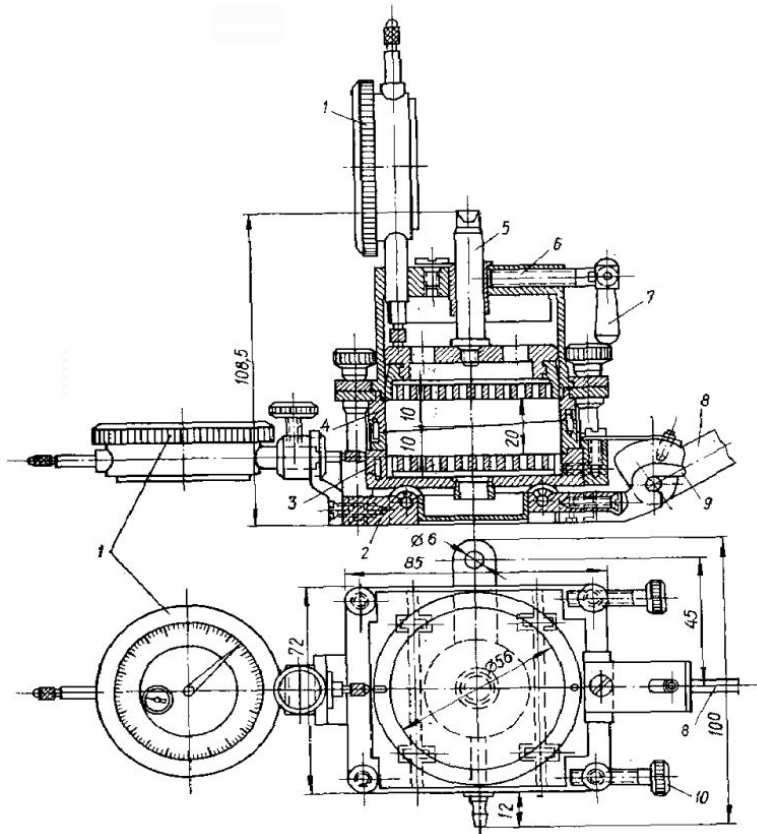
Ниже рассматривается проведение консолидированно-дренированного испытания на сдвиг глинистого грунта ненарушенной структуры и естественной влажности в приборе одноплоскостного среза М.И. Литвинова.

### **Проведение испытаний**

На рис. 10, 11 показан общий вид прибора одноплоскостного среза для испытаний грунтов на сдвиг (ПЛЛ-9).



**Рис. 10. Общий вид прибора одноплоскостного среза ПЛЛ-9.**



**Рис. 11. Схематический разрез прибора ПЛЛ-9:**

- 1 – индикатор;**
- 2 – основание прибора;**
- 3 – нижняя подвижная часть гильзы для грунта (каретка);**
- 4 – верхняя неподвижная часть гильзы;**
- 5 – дренажный поршень со штоком;**
- 6 – направляющий цилиндр;**
- 7 – зажимной винт;**
- 8 – рычаг для передачи горизонтальной нагрузки;**
- 9 – опорная часть рычага для горизонтальной нагрузки;**
- 10 – упорные винты.**

Испытания выполняются на образцах ненарушенной структуры, отобранных методом режущих колец и предварительно уплотненных в компрессионном приборе. Последовательность проведения опыта:

1. Снимается верхняя часть прибора с поршнем.
2. Верхняя и нижняя часть разрезной гильзы выравниваются относительно друг друга и каретка нижней подвижной части гильзы фиксируется горизонтальными упорными винтами.
3. В верхней части разрезной гильзы устанавливается грунтоотборное кольцо с грунтом режущей заостренной частью вверх.
4. На заостренную часть кольца с грунтом устанавливается направляющий цилиндр и поршнем выталкивателя грунт перемещается в прибор.
5. Устанавливается верхняя часть прибора, поршень доводится до соприкосновения с грунтом и закрепляется зажимным винтом.
6. Монтируются индикаторы часового типа: один для замера вертикальных деформаций; второй для замера деформаций сдвига. Поворотные шкалы индикаторов устанавливаются на ноль.
7. Рычаг для вертикальной нагрузки переводится в рабочее положение, полностью раздвигаются плечи и уравниваются: на короткое плечо навешивается контргруз  $\approx 10$  Н.
8. Отпускается зажимный винт поршня.
9. Приводится в рабочее положение рычаг для горизонтальных нагрузок.
10. Прикладывается к образцу заданная вертикальная нагрузка в один прием с выдержкой до условной стабилизации (приращение деформации



образца при полной вертикальной нагрузке не должно превышать 0,01 мм в минуту).

11. С помощью 4-х подъемных гаек между верхней и нижней частями разрезной гильзы создают зазор в 1-2 мм.

12. Полностью вывинчивают горизонтальные упорные винты каретки и приступают к испытаниям на сдвиг.

13. Горизонтальную нагрузку прикладывают ступенями по 0,01 или 0,02 МПа в зависимости от величины вертикальной нагрузки; каждую ступень горизонтальной нагрузки выдерживают до условной стабилизации деформации сдвига (скорость сдвига меньше или равна 0,01 мм в минуту).

Вертикальное давление, ступени сдвигающих нагрузок и соответствующие им перемещения сдвига записывают в журнале (таблица 5).

Начало разрушения образца грунта определяют по двум признакам:

- резкое нарастание незатухающих деформаций сдвига;
- полное перемещение сдвига превышает в опыте 4 мм.

14. За предельную сдвигающую нагрузку принимается нагрузка на рычаге с учетом его собственного веса (собственный вес рычага создает касательное напряжение 0,01 МПа).

Таблица 5.

Результаты испытаний

Вертик. давление $P$ , МПа	Сдвигающее напряжение $\tau$ , МПа	Гориз. перемещ. $\delta$ , мм	Вертик. давление $P$ , МПа	Сдвигающее напряжение $\tau$ , МПа	Гориз. перемещ. $\delta$ , мм
0,1	0,01	0,05	0,2	0,02	0,031
	0,02	0,075		0,04	0,062
	...	...		...	...
	0,08	3,95		0,12	4,89

### Обработка результатов испытаний

По данным таблицы 5 определяется предельное сопротивление грунта сдвигу  $\tau$  при заданных вертикальных давлениях  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (табл. 6), строится график зависимости  $\tau = f(P)$  (рис. 12).

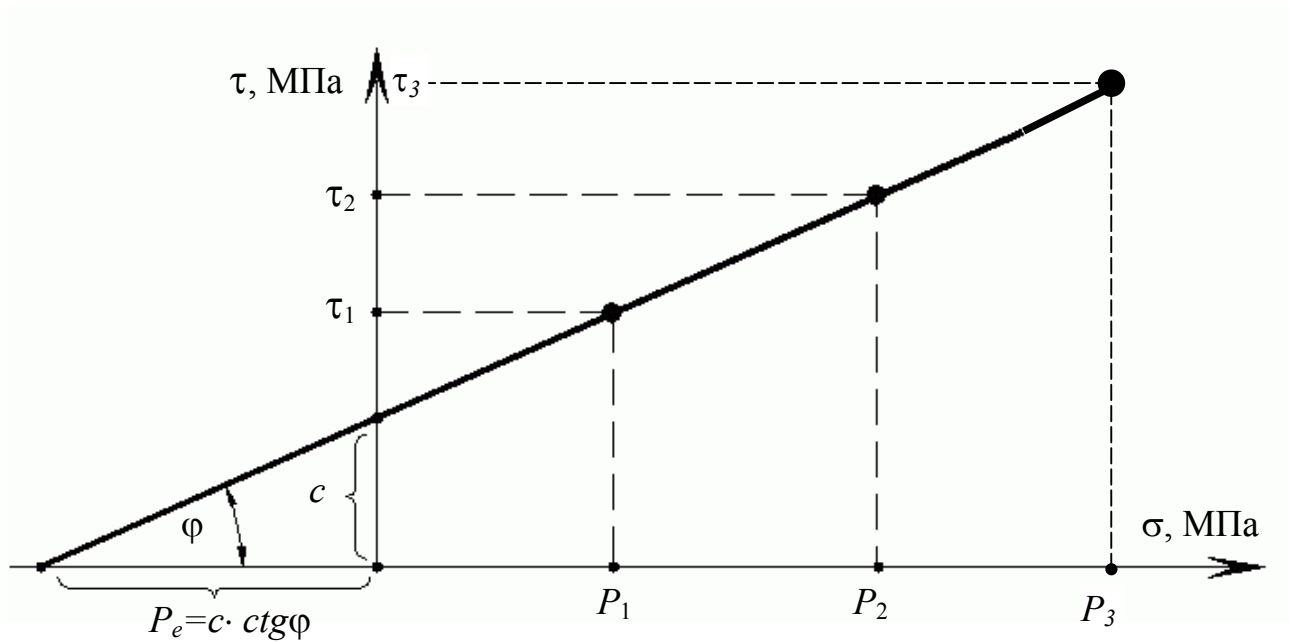
Таблица 6.

Данные для построения паспорта прочности

№ опыта	Нормальное напряжение $\sigma$ , МПа	Предельное сопротивление сдвигу $\tau$ , МПа
1	0,1	0,08
2	0,2	0,12
3	0,3	0,16

На графике (рис. 12) давления  $P$  и  $\tau$  откладываются в одном и том же масштабе (2 см – 0,1 МПа).

По полученным опытным точкам (табл.6) проводится усредненная прямая до пересечения с осями координат.



**Рис. 12. График зависимости предельного сопротивления грунта сдвигу от нормального напряжения (паспорт прочности).**

Угол внутреннего трения  $\varphi$  определяется по тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс или транспортиром с точностью до одного градуса.

Удельное сцепление определяется из формулы:

$$c = \tau - P \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

или по масштабу, как отрезок, отсекаемый на оси ординат с точностью до 0,001 МПа.

Величина  $P_e$  называется давлением связности и иногда используется в уравнениях прочности как параметр прочности  $P_e / \operatorname{ctg} \varphi$  вместо удельного сцепления  $c$ . Для песчаных (несвязных) грунтов  $P_e = 0$  и  $c = 0$ , а график на рис. 12 проходит через начало координат.

*Примечание: сведения о статистической обработке результатов испытания грунтов на сдвиг с целью получения расчетных значений угла внутреннего трения и удельного сцепления приводятся в курсе "Инженерные изыскания в строительстве" в изложении нормативного документа [8].*

## **Лабораторная работа № 4.**

### **Определение прочностных характеристик песчаного грунта на приборах одноплоскостного среза системы «Гидропроект».**

#### **Цель работы:**

1. Ознакомление с методикой определения характеристик сопротивления грунта сдвигу.
2. Приобретение навыков в работе с приборами одноплоскостного среза.
3. Определение прочностных характеристик песчаного грунта по результатам испытаний.

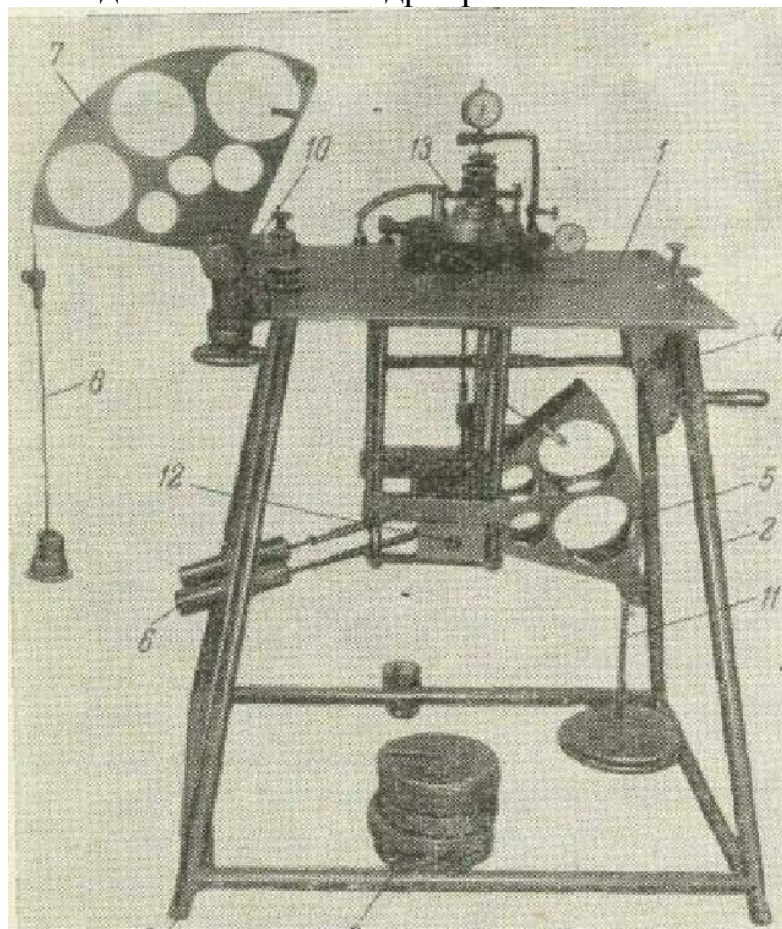
#### **Необходимое оборудование и материалы:**

1. Методические указания к выполнению работы.
2. Журнал лабораторных работ.
3. Прибор одноплоскостного среза системы «Гидропроект».
4. Индикаторы часового типа.
5. Фильтровальная бумага, тарированные грузы весом 10, 20, 50 Н.
6. Песок средней крупности в воздушно – сухом состоянии.

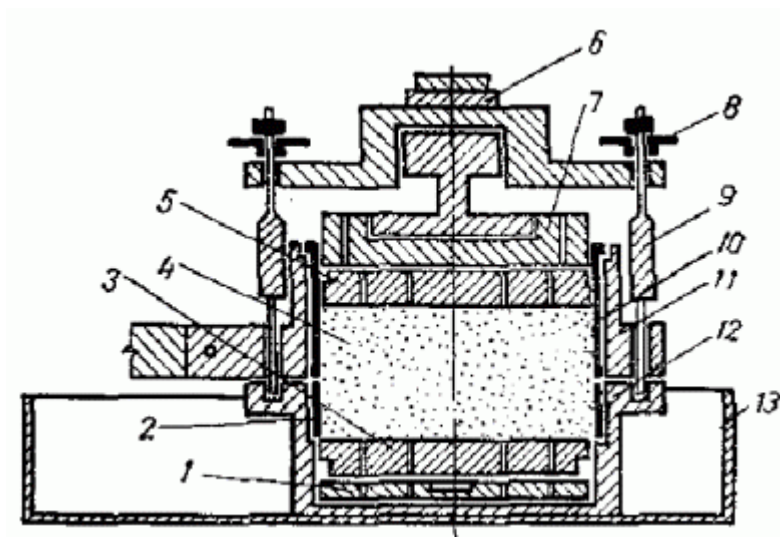
Описательная часть данной работы аналогична лабораторной работе №3.

#### **Проведение испытаний**

На рис. 13, 14 показан общий вид прибора одноплоскостного среза для испытаний грунтов на сдвиг системы «Гидропроект».



**Рис. 13. Общий вид прибора одноплоскостного среза системы «Гидропроект».**



**Рис. 14. Схематический разрез сдвигового прибора:**

- 1 – дно нижней обоймы;
- 2 – нижнее кольцо;
- 3 – перфорированный диск;
- 4 – грунт;
- 5 – перфорированный диск;
- 6 – гайка для создания зазора;
- 7 – штамп; 8 – гайка;
- 9 – установочный винт;
- 10 – верхнее кольцо;
- 11 – верхняя обойма;
- 12 – нижняя обойма;
- 13 – ванна.

### **Методическая последовательность проведения испытаний:**

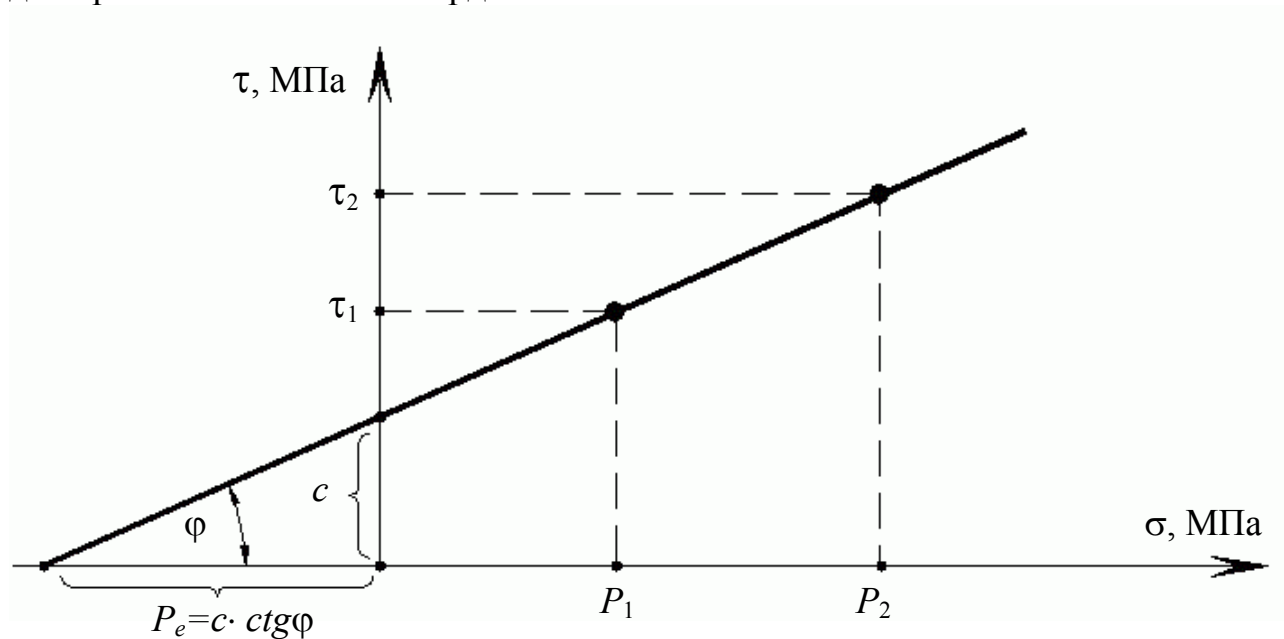
1. Снимается верхняя часть прибора с поршнем.
  2. Верхняя и нижняя часть разрезной гильзы выравниваются относительно друг друга и внутрь гильзы помещается образец грунта.
  3. Устанавливается верхняя часть прибора и закрепляется установочными винтами, поршень доводится до соприкосновения с грунтом.
  4. Монтируются индикаторы часового типа: один для замера вертикальных деформаций; второй для замера деформаций сдвига. Поворотные шкалы индикаторов устанавливаются на ноль.
  5. Подсоединяется и уравнивается система вертикального нагружения.
  6. Прикладывается к образцу заданная вертикальная нагрузка в один прием с выдержкой до условной стабилизации (приращение деформации образца при полной вертикальной нагрузке не должно превышать 0,01 мм в минуту).
  7. С помощью подъемной гайки 6 между верхней и нижней частями разрезной гильзы создают зазор в 1-2 мм.
  8. Подсоединяется система горизонтального нагружения.
  9. Горизонтальную нагрузку прикладывают ступенями по 0,01 или 0,02 МПа в зависимости от величины вертикальной нагрузки; каждую ступень горизонтальной нагрузки выдерживают до условной стабилизации деформации сдвига (скорость сдвига меньше или равна 0,01 мм в минуту).
- Вертикальное давление, ступени сдвигающих нагрузок и соответствующие им перемещения сдвига записывают в журнале (см. таблица 5).
- Начало разрушения определяют по двум признакам:
- резкое нарастание незатухающих деформаций сдвига;
  - полное перемещение сдвига превышает в опыте 4 мм.
10. За предельную сдвигающую нагрузку принимают нагрузку, при которой произошло разрушение образца.

### Обработка результатов испытаний

По полученным данным определяется предельное сопротивление грунта сдвигу  $\tau$  при заданных вертикальных давлениях  $P_1, P_2, P_3$  (см. табл. 6) и строится график зависимости  $\tau = f(P)$ .

На графике давления  $P$  и  $\tau$  откладываются в одном и том же масштабе (2 см – 0,1 МПа).

По полученным опытным точкам (табл. 6) проводится усредненная прямая до пересечения с осями координат.



**Рис. 15. График зависимости предельного сопротивления грунта сдвигу от нормального напряжения (паспорт прочности): третья экспериментальная точка на графике условно не показана.**

Угол внутреннего трения  $\varphi$  определяется по тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс или транспортиром с точностью до одного градуса.

Удельное сцепление определяется из формулы:

$$c = \tau - P \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

или по масштабу, как отрезок, отсекаемый на оси ординат с точностью до 0,001 МПа.

В отличие от пылевато-глинистых грунтов песчаные грунты имеют очень низкое удельное сцепление, которое составляет порядка 1 – 3 кПа, и повышенные значения угла внутреннего трения (порядка 30° – 40°). Таким образом, нулевое значение сцепления имеют только идеально сыпучие грунты, которые в природе практически не существуют.

## Лабораторная работа № 5.

### Определение угла естественного откоса песчаного грунта.

#### Цель работы:

1. Ознакомление с методикой определения угла естественного откоса для песчаных грунтов.
2. Приобретение навыков в работе с прибором по определению угла естественного откоса для сыпучих грунтов.
3. Определение угла естественного откоса песчаного грунта в воздушно - сухом и подводном состоянии.

#### Необходимое оборудование и материалы:

1. Методические указания к выполнению работы.
2. Журнал лабораторных работ.
3. Прибор по определению угла естественного откоса полевой лаборатории Литвинова.
4. Емкость с водой.
5. Песок средней крупности в воздушно – сухом состоянии.

Отсутствие (или низкое значение) сцепления в песках позволяет определять угол внутреннего трения  $\varphi$  по углам обрушения и углу естественного откоса грунта в условиях предельного равновесия, что подтверждает приведенная ниже схема (рис. 16). Этот метод применим для сухих и водонасыщенных песков, а также для случая фильтрации воды через откос. Обычно пески имеют в сухом и водонасыщенном состоянии практически одинаковый угол внутреннего трения. Однако пылеватые пески, содержащие большое количество коллоидных частиц, при испытании их в водонасыщенном состоянии показывают значительно более низкий угол внутреннего трения.

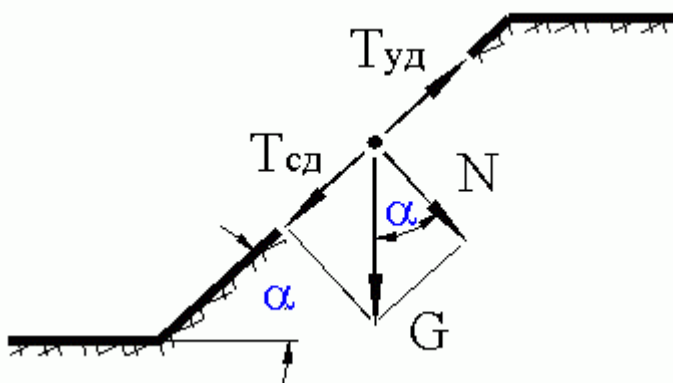


Рис. 16. Схема к определению угла естественного откоса песчаного грунта.

Элементарная частица грунта удерживается на наклонной поверхности силой трения, равной произведению нормальной компоненты силы тяжести на коэффициент трения. Обозначим коэффициент трения как тангенс угла внутреннего трения  $\varphi$ . Тогда из уравнения равновесия проекций всех сил на наклонную плоскость получим:

$$T = N \cdot \operatorname{tg} \varphi; \quad G \cdot \sin \alpha = G \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi; \quad \alpha = \varphi.$$



Углом естественного откоса песчаного грунта называют максимальное значение угла, образуемого с горизонтальной плоскостью поверхностью грунта, отсыпанного без толчков и динамических воздействий.

Угол естественного откоса определяют для песчаного грунта в воздушно - сухом состоянии и под водой.

Для испытаний применяют ящик Кулона, ящик ВИА, прибор Литвинова и др.

Рассмотрим испытание сухих песков в приборе полевой лаборатории Литвинова (рис. 17).

### Порядок выполнения работы

Определение угла естественного откоса грунта в воздушно – сухом состоянии производят следующим образом.

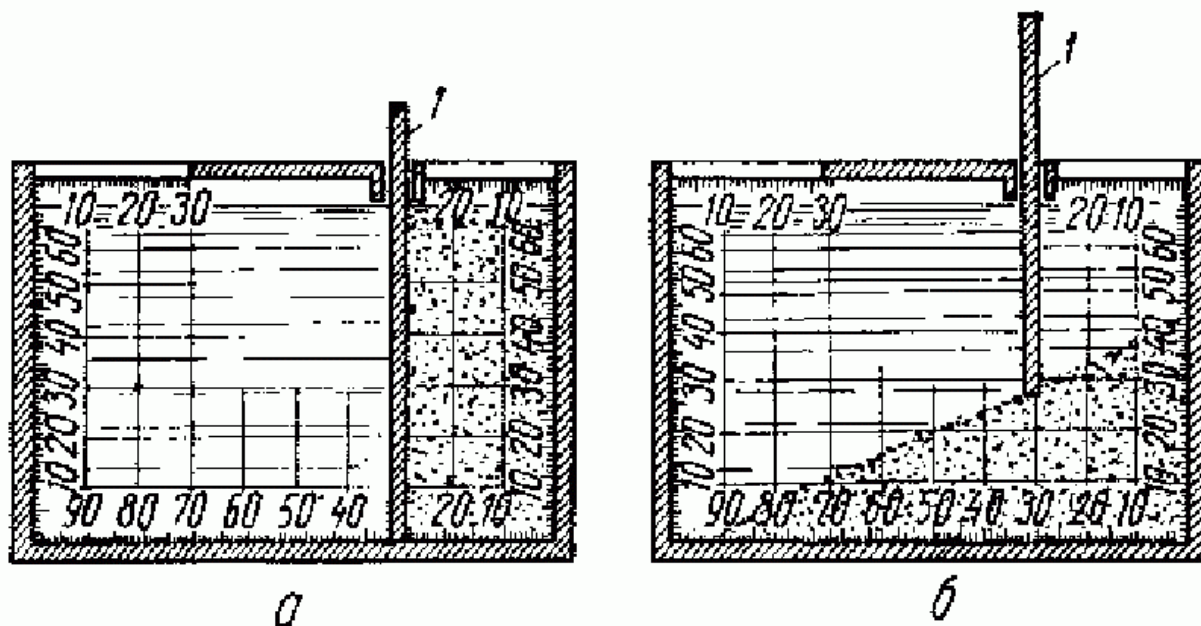


Рис. 17. Общий вид прибора для определения угла естественного откоса песков: а – при закрытой выдвижной створке; б – при выдвинутой створке; 1 – створка.

Прибор ставят на стол. Выдвижная створка при этом опущена до дна. В малое отделение прибора до верха насыпают испытываемый грунт (рис. 17). После этого постепенно поднимают выдвижную створку, следя за тем, чтобы не было толчков; при этом прибор придерживают рукой. Грунт частично пересыпается в другое отделение, пока наступает положение равновесия; угол между плоскостью свободного откоса и горизонтальной плоскостью и есть угол естественного откоса. По делениям на днище и боковой стенке отсчитывают высоту и заложение откоса и вычисляют тангенс угла естественного откоса; отсчеты ведут с точностью до 1 мм.

Определение угла естественного откоса грунта в подводном состоянии отличается от предыдущего тем, что после того, как в малое отделение прибора насыпан испытываемый грунт, в большое отделение до верха наливают воду. Выдвижную створку поднимают на несколько миллиметров, чтобы вода могла проникнуть в малое отделение. Когда весь грунт пропитается водой, поднимают створку выше и испытание продолжают так же, как и при испытании грунта в воздушно - сухом состоянии.

Результаты испытаний заносятся в таблицу 7.

Таблица 7

Результаты испытаний

№ опыта	Описание грунта	Угол естественного откоса песка, град	
		в воздушно - сухом состоянии	в подводном состоянии
1			
2			
3			
Среднее значение угла естественного откоса			

Выводы по работе касаются оценки достоверности определения указанным методом угла внутреннего трения песчаного грунта.

*Примечание: Методика проведения лабораторной работы описана в соответствии с нормативным документом России РСН 51-84. Инженерные изыскания для строительства. Производство лабораторных исследований физико-механических свойств грунтов. Приложение 10 (определение угла естественного откоса).*



**Экзаменационный билет**Специальность: **Промышленное и гражданское строительство.**Дисциплина: **Механика грунтов**Экзаменационный семестр: **3 курс, 6 семестр**

№ темы	№ вопроса	Наименование вопроса	Баллы
Тема 1	Вопрос 1.1	Как изменится объемная деформация полностью водонасыщенного грунта при отсутствии дренирования в условиях компрессионного сжатия, если давление увеличится в 10 раз.	1
	Вопрос 1.2	Число пластичности грунта 0,16, показатель текучести 0,5, влажность на границе пластичности 12 %. Определить степень влажности грунта, если удельный вес воды $10 \text{ кН/м}^3$ , удельный вес частиц грунта $27 \text{ кН/м}^3$ , удельный вес сухого грунта $16,2 \text{ кН/м}^3$ .	
	Вопрос 1.3	Влажность грунта 20 %. Удельный вес грунта $18 \text{ кН/м}^3$ . Определить вес воды, содержащейся в $5 \text{ м}^3$ грунта.	
Тема 2	Вопрос 2.1	Плотность частиц грунта $2700 \text{ кг/м}^3$ , плотность сухого грунта $1350 \text{ кг/м}^3$ . При нагружении грунта в компрессионном приборе давлением 200 кПа начальный коэффициент пористости уменьшился на 10 %. Определить модуль деформации грунта при $v=0,4$ .	2
	Вопрос 2.2	Образец грунта испытывается в стабилометре. Прочностные характеристики грунта: $c=50 \text{ кПа}$ ; $\phi=16^\circ$ . Соотношение большего главного напряжения к меньшему составляет 3,0. Определить $\sigma_1$ , соответствующее разрушению образца.	
	Вопрос 2.3	Образец грунта испытывается в стабилометре при постоянном соотношении главных напряжений. Прочностные характеристики грунта: $c=50 \text{ кПа}$ ; $\phi=16^\circ$ . Определить минимальное соотношение большего главного напряжения к меньшему главному напряжению, при котором образец грунта будет разрушен в процессе нагружения.	
Тема 3	Вопрос 3.1	Чему равно нормальное напряжение в точке приложения вертикальной силы к поверхности упругого полупространства.	2
	Вопрос 3.2	Давление на основание в центре абсолютно жесткого круглого штампа диаметром 1 м составляет 100 кПа. Определить нагрузку на штамп (кН), создающую указанное давление.	
	Вопрос 3.3	Абсолютно жесткий круглый штамп и абсолютно жесткая полоса передают на основание одинаковые средние давления. Определить, как соотносятся давления в центре указанных штампов.	

Тема 4	Вопрос 4.1	Устойчивая высота стенки траншеи, отрытой в связном грунте, составляет 4 м 28 см. Определить допустимую нагрузку (кПа) на бровку траншеи глубиной 2 м 28 см при условии, что удельный вес грунта $\gamma=18 \text{ кН/м}^3$ .	3
	Вопрос 4.2	Подпорная стена со стороны удерживающего массива грунта ( $\gamma=18 \text{ кН/м}^3$ ) заглублена на 3 м. Прочностные характеристики грунта $c=20 \text{ кПа}$ ; $\varphi=22^\circ$ . Определить величину силы предельного сопротивления грунта, удерживающего подпорную стену.	
	Вопрос 4.3	Массив сложен грунтом ( $\gamma=15 \text{ кН/м}^3$ ) с нулевыми значениями прочностных характеристик и удерживается подпорной стеной. Определить активное и пассивное давление грунта на глубине 2 м.	
Тема 5	Вопрос 5.1	При нагружении основания штампом при среднем давлении 100 кПа получены следующие результаты: восстанавливаемая часть осадки 3 мм; осадка после полной разгрузки 7 мм. Определить полную осадку штампа при среднем давлении 200 кПа, если соблюдается принцип линейной деформируемости основания.	4
	Вопрос 5.2	Однородный слой грунта толщиной 1 м испытывает однородное сжатие от планировки подсыпкой давлением 100 кПа. Коэффициент пористости грунта 0,8; коэффициент сжимаемости $0,00018 \text{ м}^2/\text{кН}$ ; коэффициент Пуассона 0,3. Определить осадку слоя грунта и его модуль деформации.	
	Вопрос 5.3	Водонасыщенный слой грунта ограничен сверху и снизу дренажными слоями и пригружен давлением 100 кПа. Определить эффективные напряжения на границах слоя и в середине слоя в момент времени $t = 0$ .	
ИТОГО:			12

## ОБРАЗЦЫ ОТВЕТОВ НА ВОПРОСЫ

<b>Ответ на вопрос 1.1:</b> Одним из допущений классической механики грунтов является предположение о несжимаемости поровой воды и минеральных частиц грунта. Из этого следует, что при отсутствии возможности фильтрации в полностью водонасыщенном грунте изменение давлений в грунте не приводит к его деформированию.	<b>Баллы</b> 1
<b>Ответ на вопрос 1.2:</b> Степень влажности грунта рассчитывается по формуле: $S_r = (\gamma_s W) / (\gamma_w e)$ . Влажность грунта может быть вычислена из выражения для определения показателя текучести: $I_L = (W - W_p) / I_p$ ; $W = I_L \cdot I_p + W_p = 0,5 \cdot 0,16 + 0,12 = 0,2$ . Коэффициент пористости, входящий в формулу для определения степени влажности, определяется из выражения: $e = (\gamma_s - \gamma_d) / \gamma_d = (27 - 16,2) / 16,2 = 0,667$ . С учетом вычисленного значения природной влажности грунта и коэффициента пористости грунта будем иметь: $S_r = (\gamma_s W) / (\gamma_w e) = (27 \cdot 0,2) / (10 \cdot 0,667) = 0,81$ .	<b>Баллы</b> 0,2 0,3 0,3 0,2
<b>Ответ на вопрос 1.3:</b> Из определения влажности следует, что вес воды, содержащейся в грунте, будет равен: $G_w = G_s W = V \gamma_d W$ . Удельный вес сухого грунта определяется по формуле: $\gamma_d = \gamma / (1 + W)$ . С учетом выражения для удельного веса сухого грунта будем иметь: $G_w = V \gamma_d W = V \cdot \gamma \cdot W / (1 + W) = 5 \cdot 18 \cdot 0,2 / (1 + 0,2) = 15 \text{ кН}$ .	<b>Баллы</b> 0,2 0,2 0,6

<p><b>Ответ на вопрос 2.1:</b>          Определяем начальный коэффициент пористости грунта: <math>e_0 = (\rho_s - \rho_d) / \rho_d = (2700 - 1350) / 1350 = 1,0</math>.          После нагружения коэффициент пористости составит: <math>e_i = e_0 - 0,1 \cdot e_0 = 0,9 \cdot e_0</math>.          Определяем осевую деформацию при изменении коэффициента пористости грунта: <math>\varepsilon_{z,i} = (e_0 - e_i) / (1 + e_0) = (e_0 - 0,9e_0) / (1 + e_0) = 0,1e_0 / (1 + e_0) = 0,1 \cdot 1 / (1 + 1) = 0,05</math>.          Вычисляем коэффициент вида напряженного состояния при компрессионном сжатии с учетом того, что <math>\nu = 0,4</math>: <math>\beta = [1 - 2\nu^2 / (1 - \nu)] = [1 - 2 \cdot 0,4^2 / (1 - 0,4)] = 0,467</math>.          Определяем модуль деформации грунта: <math>E = (\sigma_z / \varepsilon_z) \cdot \beta = (200 / 0,05) \cdot 0,467 = 1868</math> кПа</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>0,3 0,2 0,5 0,6 0,4</p>
<p><b>Ответ на вопрос 2.2:</b>          Для решения задачи воспользуемся законом прочности грунта Кулона – Мора, записанным в виде выражения: <math>(\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) / (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)</math>.          Примем <math>k = \sigma_1 / \sigma_2</math>. Тогда будем иметь: <math>(k \sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) / (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)</math>, откуда <math>\sigma_2 = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi [ \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) - 1 ] / [ k - \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) ] = 50 \cdot \operatorname{ctg} 16^\circ [ \operatorname{tg}^2(45^\circ + 16^\circ/2) - 1 ] / [ 3 - \operatorname{tg}^2(45^\circ + 16^\circ/2) ] = 107,1</math> кПа.          Разрушению образца соответствует <math>\sigma_1 = 3 \cdot 107,1 = 321,3</math> кПа.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>0,5 0,5 0,8 0,2</p>
<p><b>Ответ на вопрос 2.3:</b>          Для решения задачи воспользуемся законом прочности грунта Кулона – Мора, записанным в виде выражения: <math>(\sigma_1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) / (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)</math>.          Примем <math>k = \sigma_1 / \sigma_2</math>. Тогда будем иметь: <math>(k \sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) / (\sigma_2 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi) = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)</math>; <math>(k + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi / \sigma_2) / (1 + c \cdot \operatorname{ctg} \varphi / \sigma_2) = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)</math>. Поскольку в процессе нагружения напряжения могут принимать любые значения, примем, что <math>\sigma_2 \rightarrow \infty</math>. Тогда <math>k = \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2)</math>.          Разрушение образца грунта будет иметь место, если <math>k = \sigma_1 / \sigma_2 \geq \operatorname{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) = \operatorname{tg}^2(45^\circ + 16^\circ/2) = 1,761</math>. Таким образом <math>k_{\min} = 1,761</math>.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>0,5 0,5 0,5 0,2 0,3</p>
<p><b>Ответ на вопрос 3.1:</b>          В соответствии с решением Буссинеска нормальное напряжение в упругом полупространстве при действии на его поверхности сосредоточенной силы равно: <math>\sigma_z = (3R \cos^3 \beta) / (2\pi R^2)</math>, где <math>\beta</math> - угол наклона радиуса – вектора <math>R</math> точки, в которой определяется напряжение <math>\sigma_z</math>, к вертикали.          В точке приложения силы <math>P</math> <math>\beta = 0</math>, <math>\cos \beta = 1</math>, <math>R = 0</math> и <math>\sigma_z \rightarrow \infty</math>.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>1,5 0,5</p>
<p><b>Ответ на вопрос 3.2:</b>          Распределение давлений под круглым абсолютно жестким штампом описывается формулой Прандтля: <math>p(r) = 0,5p_m / [1 - (r/R)^2]^{1/2}</math>, где <math>R</math> - радиус круглого штампа; <math>p_m</math> – среднее давление под подошвой штампа.          В центре штампа при <math>r = 0</math> <math>p(0) = 0,5p_m = 100</math> кПа, откуда <math>p_m = 200</math> кПа.          Нагрузка на штамп равна произведению среднего давления на площадь подошвы штампа: <math>N = p_m \cdot A = 200 \cdot 3,14 \cdot 0,5^2 = 157</math> кН.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>0,5 0,5 0,5 0,5</p>
<p><b>Ответ на вопрос 3.3:</b>          Распределения давлений под жестким круглым штампом и жесткой полосой описываются формулами: <math>p(r) = 0,5p_m / [1 - (r/R)^2]^{1/2}</math>; <math>p(y) = (2/\pi) \cdot p_m / [1 - (y/b)^2]^{1/2}</math>, где <math>p_m</math> – среднее давление под подошвой штампа; <math>R</math> - радиус круглого штампа; <math>b</math> – половина ширины полосы; <math>r</math>, <math>y</math> – координата точки, в которой определяется давление <math>p(r)</math> или <math>p(y)</math>.          В центре круглого штампа <math>r = 0</math>, а в центре полосы <math>y = 0</math>.          С учетом этого <math>p(r) = 0,5p_m</math>, а <math>p(y) = (2/\pi) \cdot p_m</math>.          Отсюда следует, что <math>p(y) / p(r) = 4/\pi</math>.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>0,5 0,5 0,5 0,5</p>

<p><b>Ответ на вопрос 4.1:</b>          Устойчивая высота стенки траншеи определяется по формуле: <math>z_0 = (2c)/[\gamma \cdot \text{tg}(45^\circ - \varphi/2)] - h</math>, где <math>h = q/\gamma</math>; <math>q</math> – величина пригруза (кПа).          Из приведенной формулы получаем выражение для определения <math>h = (2 \cdot c)/[\gamma \cdot \text{tg}(45^\circ - \varphi/2)] - z_0</math>.          По условиям задачи при <math>h = 0</math> <math>z_0 = (2c)/[\gamma \cdot \text{tg}(45^\circ - \varphi/2)] = 4,28</math> м.          Таким образом <math>h = 4,28 - z_0</math>. Примем <math>z_0</math> равным глубине траншеи и получим: <math>h = 4,28 - 2,28 = 2</math> м; <math>q = h \cdot \gamma = 2 \cdot 18 = 36</math> кПа.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>1</p> <p>1</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p><b>Ответ на вопрос 4.2:</b>          Со стороны удерживающего массива грунта на подпорную стену действует в предельном состоянии пассивное давление грунта.          Сила пассивного давления грунта при отсутствии пригруза на его поверхности определяется по формуле: <math>E_p = (\gamma \cdot H^2/2) \cdot \text{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + 2 \cdot H \cdot c \cdot \text{tg}(45^\circ + \varphi/2) = (18 \cdot 3^2/2) \cdot \text{tg}^2(45^\circ + 22^\circ/2) + 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot \text{tg}(45^\circ + 22^\circ/2) = 356</math> кН/ на пог. м стены.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>1</p> <p>2</p>
<p><b>Ответ на вопрос 4.3:</b>          Активное и пассивное давления грунта вычисляются по формулам:  <math>\sigma_a = \gamma \cdot (z + h) \cdot \text{tg}^2(45^\circ - \varphi/2) - 2c \cdot \text{tg}(45^\circ - \varphi/2)</math>;  <math>\sigma_p = \gamma \cdot (z + h) \cdot \text{tg}^2(45^\circ + \varphi/2) + 2c \cdot \text{tg}(45^\circ + \varphi/2)</math>.          По условиям задачи <math>c = 0</math> и <math>\varphi = 0</math>. С учетом этого: <math>\sigma_a = \sigma_p = \gamma \cdot (z + h)</math>. При отсутствии пригруза на поверхности массива (<math>h = 0</math>) <math>\sigma_a = \sigma_p = \gamma \cdot z = 15 \cdot 2 = 30</math> кПа.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>2</p> <p>1</p>
<p><b>Ответ на вопрос 5.1:</b>          По условиям задачи при давлении 100 кПа упругая осадка составляет <math>S_e = 0,003</math> м, пластическая осадка <math>S_p = 0,007</math> м. Полная осадка равна: <math>S = S_e + S_p = 0,01</math> м.          Коэффициент жесткости основания при равномерном сжатии равен: <math>C_z = p/S = 100/0,01 = 10000</math> кН/м<sup>3</sup>.          Полная осадка при давлении 200 кПа равна: <math>S = p/C_z = 200/10000 = 0,02</math> м = 2 см.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>1</p> <p>2</p> <p>1</p>
<p><b>Ответ на вопрос 5.2:</b>          Определяем коэффициент относительной сжимаемости грунта: <math>m_v = m/(1 + e_0) = 0,00018/(1 + 0,8) = 0,0001</math> м<sup>2</sup>/кН.          По условиям задачи напряженным состоянием грунта является одномерное компрессионное сжатие. Для этого случая осадка грунта в соответствии с законом уплотнения Терцаги определяется по формуле:  <math>S = m_v \cdot \sigma_z \cdot h = 0,0001 \cdot 100 \cdot 1 = 0,01</math> м = 1 см.          Вычисляем коэффициент вида напряженного состояния <math>\beta = 1 - (2\nu^2)/(1 - \nu) = 1 - (2 \cdot 0,3^2)/(1 - 0,3) = 0,743</math>.          Осадка грунта при одномерном компрессионном сжатии определяется в соответствии с законом Гука по формуле: <math>S = \beta \cdot \sigma_z \cdot h/E</math>, откуда <math>E = \beta \cdot \sigma_z \cdot h/S = 0,743 \cdot 100 \cdot 1/0,01 = 7430</math> кПа = 7,43 МПа. Или <math>E = \beta/m_v = 0,743/0,0001 = 7430</math> кПа.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p>
<p><b>Ответ на вопрос 5.3:</b>          Эффективные напряжения в условиях одномерной задачи фильтрационного уплотнения определяются по формуле: <math>p_z(z,t) = p \cdot [1 - (4/\pi) \cdot [\sin(\pi \cdot z/2h) \cdot e^{-N} + (1/3) \cdot \sin(3\pi \cdot z/2h) \cdot e^{-9N} + (1/5) \cdot \sin(5\pi \cdot z/2h) \cdot e^{-25N} + (1/7) \cdot \sin(7\pi \cdot z/2h) \cdot e^{-49N} + \dots]]</math>.          При <math>t = 0</math> <math>N = (\pi^2 \cdot C_v)/(4h^2) \cdot t = 0</math> и <math>e^{-N} = e^{-9N} = e^{-25N} = e^{-49N} = 1</math>.          На границах слоя <math>z = 0</math> и <math>z = 2h</math>, а <math>\sin(\pi \cdot z/2h) = \dots = \sin(7\pi \cdot z/2h) = 0</math>. Поэтому на границах слоя при <math>t = 0</math> <math>p_z(z,t) = p = 100</math> кПа.          В середине слоя <math>z = h</math>, <math>\sin(\pi \cdot z/2h) = \sin(5\pi \cdot z/2h) = 1</math>, <math>\sin(3\pi \cdot z/2h) = \sin(7\pi \cdot z/2h) = -1</math>.          С учетом этого имеем: <math>p_z(z,t) = p \cdot [1 - (4/\pi) \cdot [1 - (1/3) + (1/5) - (1/7) + \dots]] = p \cdot (1-1) = 0</math>.</p>	<p><b>Баллы</b></p> <p>0,5</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>0,5</p> <p>1</p>

### Учебно-методическая литература

1. ДСТУ Б В.2.1-2-96 (ГОСТ 25100-96). Грунты. Классификация.
2. ДСТУ Б В.2.1-3-96 (ГОСТ 30416-96). Грунты. Лабораторные испытания. Общие положения.
3. ДСТУ Б В.2.1-8-2001. Грунты. Отбор, упаковка, транспортирование и хранение образцов.
4. ГОСТ 5180-84. Грунты. Методы лабораторного определения физических характеристик.
5. ДСТУ Б В.2.1-4-96 (ГОСТ 12248-96). Грунты. Методы лабораторного определения характеристик прочности и деформируемости.
6. ГОСТ 25584-90. Грунты. Методы лабораторного определения коэффициента фильтрации.
7. ГОСТ 12536-79. Грунты. Методы лабораторного определения гранулометрического (зернового) и микроагрегатного состава.
8. ДСТУ Б В.2.1-5-96 (ГОСТ 20522-96). Грунты. Методы статистической обработки результатов испытаний.
9. ГОСТ 23161-78. Грунты. Методы лабораторного определения характеристик просадочности.
10. СНиП 2.02.01-83\*. Основания зданий и сооружений. – М.: Стройиздат, 1995. – 49 с.
11. Пособие по проектированию оснований зданий и сооружений (к СНиП 2.02.01-83). – М.: Стройиздат, 1986. – 415 с.
12. Веселов В.А. Проектирование оснований и фундаментов. – М.: Стройиздат, 1990. – 303 с.
13. Далматов Б.И. Механика грунтов, основания и фундаменты. – Л.: Стройиздат, 1988. – 417 с.
14. Зоценко М.Л., Коваленко В.І., Хілобок В.Г., Яковлев А.В. Інженерна геологія, механіка ґрунтів, основи і фундаменти. – К.: Вища школа, 1992. – 400 с.
15. Механика грунтов, основания и фундаменты: Учеб. пособие / Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В. и др.; Под ред. С.Б. Ухова. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2002. – 556 с.
16. Цытович Н.А. Механика грунтов (краткий курс). – М.: Высш. школа, 1983. – 288 с.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ  
СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

---

Кафедра оснований, фундаментов и подземных сооружений

Учебное пособие  
(часть № 3)  
по курсу "Механика грунтов"  
(для специальности 8.092 101 "Промышленное  
и гражданское строительство")

Составители:

Петраков А.А.

Яркин В.В.

Таран Р.А.

Казачек Т.В.

Подписано к печати 30.08.04. Формат 84×108/16.

Усл. печ. л. 10,35. Заказ 832. Тираж 100 экз.

---

**Отпечатано в типографии ООО "НОРД Компьютер"**

**На цифровом лазерном издательском комплексе Rank Xerox DocuTech 135.**

**г. Донецк, бульвар Пушкина, 23. Телефон: (062) 337-43-06**